ENTERPRISE RISK MANAGEMENT: SUFICIENCIA DE RESERVAS DE CAPITAL Y CONCENTRACIÓN Y OPTIMIZACIÓN DE RIESGO CORPORATIVO EN CARTERAS DE SEGUROS

DOCUMENTO DE TRABAJO - DW-DT-006

JESÚS M. VELÁSQUEZ BERMÚDEZ
DecisionWare Ltda.
jesus.velasquez@decisionware.net

Bogotá, Febrero 2003
(Revisión 2017)

ENTERPRISE RISK MANAGEMENT: SUFICIENCIA DE RESERVAS DE CAPITAL Y CONCENTRACIÓN Y OPTIMIZACIÓN DE RIESGO CORPORATIVO EN CARTERAS DE SEGUROS

JESÚS M. VELÁSQUEZ BERMÚDEZ
DecisionWare Ltda.
jesus.velasquez@decisionware.net

RESUMEN

La concentración de los negocios, o inversiones, en un segmento del mercado ha sido identificada como una fuente importante de riesgo para las organizaciones de cualquier tipo. Los acercamientos basados en la teoría de cartera se han enfocado principalmente a la diversificación óptima de carteras de instrumentos de financieros, para los cuales se puede obtener información compatible con los modelos de Markowitz (1959). Tradicionalmente, los estudios basados en la teoría clásica de cartera tratan el problema de concentración indirectamente, ya que su principal preocupación es la diversificación de los activos a través del conocido esquema "mean-variance", pero sin proporcionar una medida de concentración clara, ni una relación explícita con el riesgo de la cartera. En el caso de riesgo de crédito, típicamente, los agentes aplican técnicas de calificación basadas en la opinión de expertos sobre el grado de concentración en diferentes segmentos para obtener un indicador de la concentración de crédito. El número obtenido vale en términos cardinales y jerárquicos, pero no corresponde a una medida directa del riesgo que pueda ser traducida en pérdidas potenciales o en "Value-at-Risk" (VaR) (Márquez Diez-Canedo J., 2002). El documento describe dos tipos de modelamiento mediante la formulación de:

1. *Medidas de concentración basadas en el indicador Herfindahl-Hirschman (Tirol 1995, Shy 1995);*
2. *Modelos de optimización que permitan determinar la mejor distribución de la cartera en términos de la concentración de riesgos.*

Como caso de aplicación se toma las empresas de seguro, pero es aplicable a cualquier organización que desee realizar control de riesgos corporativos.

1. INTRODUCCIÓN

*El presente documento establece reglas explícitas que relacionan el riesgo de iliquidez con la suficiencia de reservas para cubrimiento de riesgo (capital y más primas de las pólizas) en el negocio de seguros. Para la teoría que se presenta a continuación, ha tomado como principal referencia el documento **"Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios"** (Márquez Diez-Canedo, J., 2002). Existen varias partes del texto que se han tomado directamente de dicho artículo y se han adaptado al contexto de la problemática del riesgo de seguros. Adicionalmente, al lector interesado se le sugiere que cuando la explicación dada no se considere suficiente, consulte el texto original.*

De acuerdo con Márquez Diez-Canedo (2002), "la mayoría de las metodologías actuales de control riesgo de crédito dependen sobremanera de métodos numéricos para obtener la distribución de pérdidas de una cartera; debido a esto, la determinación de la suficiencia de capital y de límites individuales para los créditos, es un proceso empírico que requiere de un gran sustento computacional. La obtención de una medida de concentración y su contribución al riesgo en carteras de créditos, así como la identificación de segmentos que *exhiban concentración excesiva, son problemas que hasta el momento no se han podido resolver a pesar de su gran importancia".*

Márquez Diez-Canedo (2002) desarrolla fórmulas explícitas para medir los riesgos derivados de la concentración de créditos bancarios teniendo en cuenta los valores esperados y las matrices de varianza-covarianza para la probabilidad de "default" entre clientes de un mismo sector, o segmento, y entre clientes de diferentes sectores. Siguiendo un paralelo, a partir de dicha metodología, en el presente documento se establecen los procesos matemáticos a seguir para controlar la concentración de los riesgos derivados de las ventas de pólizas de seguros. Como punto de partida se toma la distribución de pérdidas con una media y varianza específicas, no necesariamente normal, y a partir de ellos se obtiene el valor en riesgo (VaR) de la cartera de pólizas como la pérdida esperada más un cierto múltiplo de la desviación estándar de las pérdidas. Esto conduce a una cota inferior para las reservas de capitalización del negocio.

Cualquier cartera, independiente del tamaño de los riesgos, pueden mostrar excesiva concentración en cualquier dimensión, si las probabilidades de pérdidas están altamente correlacionadas, o se correlacionan significativamente en circunstancias técnico-socio-económicas adversas; por lo tanto, la obtención de una buena medida ex-ante de concentración es difícil por varias razones:

- *i) Se debe identificar los segmentos (dimensiones, clases o tipos de concentración) que son relevantes en una situación en particular (por ejemplo: región geográfica, sector industrial, mercados, productos, clientes, etc.);*
- *ii) Es necesario decidir la jerarquía entre las dimensiones: por ejemplo, qué es más importante: ¿el nivel o la ubicación del riesgo, o ambos son igualmente importantes ?*

2. VALOR EN RIESGO Y CONCENTRACIÓN.

A continuación, se provee un marco teórico que permite la medición de la concentración ex-ante. Partiendo de un modelo simple, donde se supone una sola dimensión de concentración y pólizas con la misma probabilidad de generar siniestros, se desarrolla un modelo que puede manejar cualquier número de dimensiones de concentración, y las pólizas de cada dimensión pueden tener probabilidades y valores de siniestro diferentes, además de estar correlacionados entre sí, al interior de un segmento y entre segmentos.

Para manejar la concentración se deben establecer límites a la cantidad máxima de riesgo que se puede comprometer en cada negocio a lo largo de las diferentes dimensiones en las que se puede dar la concentración. Dos serán las referencias a tener en cuenta: el valor en riesgo (VaR) asociado a la cartera y los límites a respetar para garantizar la suficiencia de reservas de capital para que el negocio no se quiebre.

Al discutir la concentración el tema que se debe analizar es: cuánto riesgo está concentrado en una sola póliza o en un grupo de pólizas ?. Así, se puede tener todo el riesgo comprometido con una sola póliza sin que exceda la proporción máxima de las reservas que se permite a la cartera, pero que bajo cualquier criterio representa una cartera totalmente concentrada. Por otro lado, se puede tener múltiples riesgos del mismo tamaño (o de pequeño tamaño) en cuyo caso la cartera está totalmente diversificada. De esta manera, se puede tener carteras muy concentradas y carteras altamente diversificadas que respeten las restricciones en términos del capital arriesgado.

2.1 CLIENTES UNIFORMES

2.1.1. CONDICIONES DE SUFICIENCIA

Como punto de partida, se asume que la concentración se da en una sola dimensión, y que la probabilidad de siniestro, el valor del siniestro y el valor de las primas caracterizan a las pólizas que se suscriben con los clientes.

*El "límite individual" de riesgo a comprometer con en una sola póliza se puede expresar como una proporción δ de las reservas para cubrimiento de riesgos **K**; estas reservas están constituidas por el capital social del negocio más las primas cobradas por las pólizas. Lo que matemáticamente se escribe como*

$$K = C + \Sigma_{i=1,N}\ w_i\ \varphi_i$$

*donde **C** representa el capital social (o el nivel de reservas inicial), **N** el número de potenciales pólizas, φ_i el valor de la prima de la póliza **i**, y w_i una variable binaria que representa la decisión de suscribir la póliza **i**, **1** si se suscribe y **0** en caso contrario.*

*En adelante el límite individual en una dimensión se fija como una proporción θ del valor de la cartera **V** que se define como máximo nivel de exposición*

$$V = \Sigma_{i=1,N}\ w_i\ \mu_i$$

*Se puede comprobar que δ y θ están relacionados linealmente. Para ver esto, sea f_i el valor de los siniestros de la **i**-ésima de **N** pólizas de la cartera*

$$f_i = \mu_i\, w_i$$

que debe cumplir

$$f_i \leq \delta K = \delta\,(K/V)\ V = \delta\,\psi\,V = \theta\,V$$

donde $\psi = K/V$ es la razón de capitalización del negocio de seguros.

Sea ω el valor esperado de las pérdidas que corresponde a una suma de variables aleatorias cada una de ellas asociadas al valor del siniestro para cada póliza; o sea:

$$\omega = \Sigma_{i=1,N}\ E(x_i)$$

*donde x_i es el valor de los siniestros de la póliza **i**. Para caracterizar x_i hay que tener en cuenta dos aspectos: i) la probabilidad de que ocurra un siniestro; y ii) el valor del siniestro dado que ocurrió. Sea p_i la probabilidad de que al cliente de la póliza **i** le ocurra un siniestro y μ_i el valor del siniestro (que se asume como un valor determinístico).*

Bajo la hipótesis de que todas las pólizas son iguales, o sea que la probabilidad de siniestro y el valor del siniestro son independientes de la póliza, se tiene que

$$\omega = \Sigma_{i=1,N}\ E(x_i) = \Sigma_{i=1,N}\ p_i\,\mu_i\,w_i = \Sigma_{i=1,N}\ w_i\ p\ \mu = p\ \mu\ \Sigma_{i=1,N}\ w_i = p\ \mu\ n$$

*donde **p** representa la probabilidad de un siniestro, μ el valor del siniestro y **n** el número total de pólizas suscritas.*

Sea σ^2 la varianza de las pérdidas que, bajo hipótesis de independencia, es igual a la suma de las varianzas de cada siniestro

$$\sigma^2 = \Sigma_{i=1,N}\ V(x_i)$$

*Se sabe que si se vende la póliza **i** la varianza $V(x_i)$ es igual a $p(1-p)\mu^2$. Por lo tanto*

$$\sigma^2 = \Sigma_{i=1,N}\, w_i\, p(1-p)\mu^2 = p(1-p)\mu^2 \Sigma_{i=1,N}\, w_i = np(1-p)\mu^2$$

Para controlar la concentración se debe cumplir

$$f_i \leq \theta\, n\, \mu \quad \forall\, i=1,N$$

Si la concentración tiene que ver con el número de pólizas, entonces la máxima concentración restringida se da cuando se concentra todo el riesgo en un número **n** *de clientes que respeta la restricción previa, es decir:*

$$f_i = \begin{cases} \theta V & i = 0,1,2,3,....,n \\ 0 & i = n+1,\, n+2,....,N \end{cases}$$

donde, para facilidad del análisis matemático, se asume que **n** *es un entero que satisface*

$$n\,\mu = n\,\theta V = V \Rightarrow n = 1/\theta$$

Con base en estos supuestos, la probabilidad de que **m** *de las* **n** *pólizas sufran siniestros se distribuye de acuerdo con una función de distribución de probabilidad (***fdp***) binomial; es decir:*

$$Prob\,(m;n) = \binom{n}{m} p^m\, (1-p)^{n-m}$$

Para **n** *grande, la* **fdp** *binomial se puede aproximar por medio de una* **fdp** *normal con media* **np** *y varianza* **np(1-p)**.

Sea α *el nivel de confianza adoptado, entonces se tiene que definiendo*

$$n_\alpha = np + z_\alpha\, (np(1-p))^{1/2}$$

se cumple que la probabilidad de que más de n_α *pólizas sufran un siniestro es* α, *siendo* z_α *la variable normal estandarizada que corresponde al nivel de confianza* α.

Si el valor de cada siniestro, cuando ocurre, es μ, *se tiene que el valor en riesgo para una cartera con este patrón de concentración, a un nivel de confianza* α, *es:*

$$VaR_\alpha = n_\alpha\, \mu = n_\alpha\, \theta V$$

Sí se desea que la pérdida máxima esperada no exceda con probabilidad α *(definición de valor en riesgo* VaR_α*) las reservas para cubrimiento de riesgos, se debe cumplir:*

$$VaR_\alpha = n_\alpha\, \theta V = [np + z_\alpha\, (np(1-p))^{1/2}]\, \theta V \leq K = C + n\varphi$$

donde φ *representa el valor de la prima de cada póliza, que en este caso se asume igual para todas.*

Nótese que la anterior expresión se puede expresar en términos de la media y el desvío estándar de las pérdidas por siniestros:

$$VaR_\alpha = \omega + z_\alpha\, \sigma$$

Despejando θ, *recordando que* $n\theta$ *es igual a* **1,** *se llega a:*

$$\theta \leq ((K - pV) / z_\alpha V)^2 / p(1-p) = (\psi-p)^2 / z_\alpha^2\, p(1-p) = \Theta(p,\psi,\alpha,\varphi)$$

La suficiencia de reservas se da si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\psi \geq VaR_\alpha/V = p + z_\alpha (p(1-p)\theta)^{1/2}$$

La anterior expresión relaciona el indicador de concentración θ*, con la razón de capitalización del negocio* ψ*, la probabilidad de siniestro de los clientes* p*, el valor de la prima de la póliza* φ*, y el nivel de confianza* α*, a través de* z_α*. El límite individual se asocia con el número de clientes donde se concentra todos los riesgos* $n=1/\theta$*, que es un indicador de concentración de la cartera de pólizas.*

2.1.2. OPTIMIZACIÓN DE LAS DECISIONES

Para maximizar la ganancia esperada, se debe determinar el número máximo de pólizas, **n,** *que se pueden suscribir Para ello se debe resolver la siguiente ecuación cuadrática*

$$k^2 (p\mu - \varphi) + k\, z_\alpha (p(1-p))^{1/2} \mu - C = 0$$

donde n *es igual a* k^2*. Si se define la prima como una fracción* γ *de* μ*, o sea*

$$\varphi = \gamma \mu$$

la anterior ecuación se puede escribir como

$$k^2 (p-\gamma) + k\, z_\alpha (p(1-p))^{1/2} - C/\mu = 0$$

y el valor máximo de n *debe cumplir*

$$n^2 = 1/\theta^2 \leq \{-z_\alpha (p(1-p))^{1/2} \pm [\, z_\alpha^2\, p(1-p) + 4(p-\gamma)\, C/\mu\,]^{1/2} \} / 2(p-\gamma)$$

La expresión representa una relación de suficiencia de reservas en términos del riesgo de la cartera, que explícitamente incluye una medida θ *de su concentración. Como se verá en este documento, estas expresiones son robustas bajo condiciones más generales.*

2.2 CLIENTES DIFERENCIADOS

2.2.1. CONDICIONES DE SUFICIENCIA

El sistema de seguros descrito en el numeral anterior, en donde la cartera contiene n *pólizas todas con las mismas características, no es realista. Por tanto, es importante obtener un indicador de concentración que tenga sentido en términos de monto en riesgo, y que al mismo tiempo permita más libertad en la conformación de la cartera de pólizas diferenciándolas entre sí.*

Definamos $F=\{ f_i \}$ $(i=1,2,....,N)$ *como el vector que representa la cartera de pólizas con elementos*

$$f_i = \mu_i w_i$$

donde μ_i *representa el valor de la pérdida debida a un siniestro relacionado con la i-ésima póliza y* w_i *la decisión de suscribir la póliza* i*, será* **1** *si se suscribe y* **0** *en caso contrario. El valor de la cartera en este caso estará definido como*

$$V = \Sigma_{i=1,N}\, w_i\ \mu_i$$

Si la probabilidad de siniestro de cada póliza es **p**, *y suponiendo independencia entre la probabilidad de cada uno de los siniestros, podemos definir* **N** *variables aleatorias semicontinuas* x_i *que representen las pérdidas asociadas a la póliza, sin tener en cuenta el valor de la prima:*

$$x_i = \begin{cases} \mu_i & \text{con probabilidad } \mathbf{p} \\ 0 & \text{con probabilidad } \mathbf{1\text{-}p} \end{cases}$$

Se sabe que si se vende la póliza **i** *el valor esperado* $E(x_i)$ *es igual a* $p\mu_i$ *y que la varianza* $V(x_i)$ *es igual a* $p(1-p)\mu_i^2$.

Bajo el supuesto de independencia, se tiene que:

$$\omega = E(\Sigma_{i=1,N}\, x_i\, w_i) = \Sigma_{i=1,N}\, E(x_i)\, w_i = \Sigma_{i=1,N}\, p\mu_i\, w_i = p\Sigma_{i=1,N}\, f_i = p\ \Sigma_{i=1,N}\, w_i\mu_i = pV$$

$$\sigma^2 = V(\Sigma_{i=1,N}\, x_i\, w_i) = \Sigma_{i=1,N} V(x_i) w_i = \Sigma_{i=1,N}\, p(1-p)\mu_i^2 w_i = p(1-p)\Sigma_{i=1,N}\, f_i^2$$

Al ser $F=\{ f_i \}$ *un vector arbitrario, es difícil conocer la* **fdp** *exacta de* $\Sigma_{i=1,N} x_i w_i$. *Sin embargo, para* **N** *grande, la* **fdp** *normal debe ser una aproximación razonable, por tanto:*

$$VaR_\alpha\ = \omega + z_\alpha\, \sigma = p\ V + z_\alpha\, (p(1-p)\Sigma_{i=1,N}\, f_i^2)^{1/2} \le K = C + \Sigma_{=1,N}\ \varphi_i\, w_i$$

donde φ_i *representa el valor de la prima de la póliza* **i.** *Siguiendo la tónica del análisis del numeral anterior, si se requiere que* $VaR_\alpha \le K$ *se debe cumplir:*

$$IHH(F) = \Sigma_{i=1,N}\, f_i^2 / (\Sigma_{i=1,N}\, f_i)^2 \le (\psi\text{-}p)^2 / z_\alpha^2\ p(1-p) = \Theta(p,\psi,\alpha,\eta)$$

donde η *es el vector de primas con elementos* $\{ \varphi_i \}$.

Nótese que la cota $\Theta(p,\psi,\alpha,\eta)$ *tiene la misma estructura que la obtenida en el primer caso, cuando se supuso que la cartera consistía en* **n** *pólizas cada una de ellas con las mismas características. La diferencia, es que en lugar de usar el límite* **n** *como medida de concentración, ahora la concentración está medida por:*

$$IHH(F) = \Sigma_{i=1,N}\, f_i^2 / (\Sigma_{i=1,N}\, f_i)^2$$

*El anterior índice se conoce como el índice de Herfindahl-Hirschman (***IHH***), el cual, en la literatura técnica-económica sobre concentración industrial, es una medida de la concentración económica de un mercado; o, inversamente, la medida de falta de competencia en un sistema económico. Un índice elevado expresa un mercado muy concentrado y poco competitivo.*

Por lo anterior, se debe notar que el nivel de concentración de una cartera puede controlarse utilizando una medida general de concentración como **IHH(F)** *y no solo por un monto que límite los riesgos asumidos en cada negocio.*

La suficiencia de reservas se da si se satisface la siguiente desigualdad:

$$\psi \ge VaR_\alpha / V = p + z_\alpha\, (p(1-p) IHH\ (F))^{1/2}$$

Esta desigualdad relaciona la suficiencia de reservas con la probabilidad de siniestros, el nivel de confianza usado para calcular el valor en riesgo (VaR) y el índice de concentración **IHH(F)**. *También muestra que existe* *una relación directa entre el índice de Herfindahl-Hirschman y la varianza de la probabilidad de siniestro* ***p****. Dado que el índice toma valores entre el recíproco del número de pólizas* ***N*** *y* ***1****, la varianza* $(p\,(1-p)\,IHH(F))^{1/2}$ *variará entre* $(p(1-p)/N)^{1/2}$ *y* $(p(1-p))^{1/2}$*, dependiendo del grado de concentración* ***IHH(F)****.*

Además, nótese que el papel que juega ***IHH(F)*** *es totalmente compatible con la definición de "mejor diversificación" de Kealhoffer (1998) quien afirma:*

"La cartera A está mejor diversificada que la cartera B si ambas tienen la misma pérdida esperada, pero la probabilidad de que la pérdida exceda un cierto porcentaje es más pequeña para A que para B"

dado que se cumple que, para carteras con la misma pérdida esperada, entre menor sea el valor de ***IHH(F)****, menor será la probabilidad de que la pérdida exceda un nivel específico.*

En Márquez Diez-Canedo J., (2002) se demuestra que todo se comporta como debe. La demostración del teorema 5.1 de dicho documento resume las principales implicaciones de las relaciones anteriores:

La cota $\Theta(p,\psi,\alpha,\eta)$ *sobre la medida de concentración* ***IHH(F)*** *tiene las siguientes propiedades:*

1. $\Theta(p,\psi,\alpha,\eta)$ *tiene una relación directa con la razón de capitalización* ψ *y una relación inversa con la probabilidad de siniestro* ***p,*** *los valores de las primas* φ_i *y el nivel de confianza del valor en riesgo* z_α*.*
2. *Si la medida de concentración excede la cota (*$IHH(F) > \Theta(p,\psi,\alpha,\eta)$*), entonces el nivel de reservas es insuficiente para el nivel de confianza* α*.*
3. *Si la probabilidad de siniestro* ***p*** *excede la razón de capitalización* ψ*, entonces el nivel de reservas es insuficiente para enfrentar el riesgo asumido, para cualquier nivel de confianza* α *y cualquier valor de la medida de concentración* ***IHH(F)****.*
4. *Si* $\Theta(p,\psi,\alpha,\eta)>1$*, cualquier nivel de concentración es aceptable.*

Las anteriores son reglas útiles que permiten determinar la suficiencia de reservas, además que se pueden calcular los ajustes requeridos en la razón de capitalización ψ *y en los valores de las primas* φ_i *para enfrentar variaciones en la probabilidad de siniestro* ***p*** *y/o en la concentración de la cartera de pólizas. Dependiendo del control que se tenga sobre la probabilidad de siniestro y sobre la concentración, también pueden calcularse los ajustes necesarios en dichas variables. Así, sí la concentración de la cartera excede la cota al nivel de confianza elegido, la cota sobre* ***IHH(F)*** *proporciona una forma conveniente para hacer los ajustes necesarios en* ψ*,* φ_i*,* ***p*** *y* ***IHH(F)*** *de manera que el riesgo no ponga en peligro el capital del negocio. Otro resultado interesante es que, si la probabilidad de siniestro excede la razón de capitalización, se está enviando una señal de alerta de que el capital del negocio está en riesgo independientemente, de la concentración de la cartera y del nivel de confianza elegido.*

Los resultados anteriores proporcionan un marco analítico para determinar la suficiencia de reservas, y medir la concentración en su relación con el riesgo. En particular, se muestra que bajo ciertos supuestos, el límite individual de riesgo y el índice de Herfindahl-Hirschman son medidas de concentración que tienen la misma cota para propósitos de suficiencia de reservas. Sin embargo, quedan cabos sueltos, con respecto a cómo el índice se relaciona con la idea intuitiva de que la concentración está relacionada con el número mínimo de pólizas donde existe mayor concentración. Además, dado que la concentración se administra y regula fijando límites a los riesgos individuales es deseable que el valor del índice esté relacionado con el límite que se fije para el tamaño de los riesgos individuales.

Es conveniente adoptar la notación matricial-vectorial para simplificar el análisis, lo que implica el siguiente cambio

$$IHH(F) = \Sigma_{i=1,N}\, f_i^2 / (\Sigma_{i=1,N}\, f_i)^2 = \| F \|^2 / (1^T F)^2$$

donde $\|\mathbf{F}\|^2$ *es la norma euclidiana del vector* $\mathbf{F}$ *y* $\mathbf{1}^T$ *denota el vector unitario en* $\mathbf{E}^N$*; esto es* $\mathbf{1}^T = \{1, 1, \ldots, 1\}$. *La condición sobre el* $\mathbf{VaR}_\alpha$ *queda definido como*

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha (p(1-p)F^T F)^{1/2} = \pi^T F + z_\alpha (F^T M F)^{1/2} \leq K = C + \eta y$$

donde $\boldsymbol{\pi}$ *es un vector de probabilidades de siniestro con componentes* $\{ p_i \}$, $\mathbf{y}$ *es el vector de variables de decisión con elementos* $\{ w_i \}$, *y* $\mathbf{M}$ *representa la matriz de varianza-covarianza, que bajo independencia corresponde a una matriz diagonal con elementos* $\mathbf{p(1-p)}$.

Nótese que $\mathbf{V}$ *es igual a* $\mathbf{1^T F}$ *y puede considerarse como un factor de normalización, de manera que lo que realmente caracteriza la concentración es la estructura de* $\mathbf{F}$*. Para examinar cómo la concentración se relaciona con la idea de que mucho riesgo en pocos clientes significa más concentración, se debe ser consistente con la idea de que la máxima concentración ocurre cuando todo el riesgo está en un solo cliente y la mínima cuando todos los clientes implican el mismo riesgo. En Márquez Diez-Canedo (2002) se demuestra que para acotar la concentración imponiendo límites a los riesgos asumidos en cada póliza se requiere que*

$$F^T \leq \theta V\, 1^T$$

Sí lo anterior se da, se cumple

$$IHH(F) \leq \theta$$

y la máxima concentración restringida bajo la medida de Herfindahl-Hirschman se da sí y sólo sí $\mathbf{F}$ *es alguna permutación de la siguiente distribución:*

$$f_i = \begin{cases} \theta V & i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n \\ 0 & i = 0, 1, 2, 3, \ldots, N \end{cases}$$

donde $\mathbf{n}$ *es igual a* $\mathbf{1/\theta}$

La prueba de lo anterior se consigue considerando que determinar el máximo $\mathbf{F}^*$ *de* $\mathbf{IHH(F)}$ *respetando la restricción* $\mathbf{F^T \leq \theta V 1^T}$, *equivale a encontrar una solución al siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} &\{ \max F^T F \mid \\ &F^T 1 = V \\ &F^T \leq \theta V\, 1^T \\ &0 \leq F^T \} \end{aligned}$$

Para probar necesidad, se demuestra que la solución propuesta para $\mathbf{F}^*$ *satisface las condiciones* **KKT** *(Karush-Kuhn-Tucker) para este problema. Para probar suficiencia, se argumenta que dado que se está maximizando una función convexa sujeta a restricciones lineales, la solución óptima del problema se encuentra en un punto extremo del poliedro convexo definido por las restricciones. Se puede ver que todos los puntos extremos de este poliedro son vectores con* $\mathbf{k}$ *elementos iguales a* $\boldsymbol{\theta}\mathbf{V}$, *y los restantes son ceros;* $\mathbf{k \leq n}$*. De esta manera el máximo se obtiene cuando* $\mathbf{k}$ *es igual a* $\mathbf{n}$.

Realizando el manejo algebraico apropiado se puede probar que se cumple

$$IHH(F) \leq H(F^*) = \theta$$

Este resultado tiene implicaciones importantes ya que establece que, poniendo un límite sobre los riesgos individuales, se está aplicando también un límite a la concentración medida con el índice de Herfindahl-Hirschman en la misma cantidad $\boldsymbol{\theta}$*. De esta manera, es simple comprobar la suficiencia de reservas de capital comparando el parámetro individual* $\boldsymbol{\theta}$ *con* $\boldsymbol{\Theta(p, \psi, \alpha, \eta)}$.

De forma alternativa, puede obtenerse la relación de suficiencia de reservas en términos del límite individual de cada riesgo; es decir:

$$\psi \geq p + z_\alpha (p(1-p)\theta)^{1/2}$$

*Así, se proporciona una regla simple para verificar la suficiencia de reservas, sin hacer cálculos complicados: se toma θ como el cociente entre el riesgo más grande que tiene la cartera y el valor total de ésta, y la tasa observada de siniestros como la aproximación ex post de la probabilidad de siniestros y se sustituyen estos valores en el lado derecho de la ecuación; como se garantiza que **IHH(F)**$\leq\theta$, si la desigualdad se conserva es una señal de que el negocio está bien capitalizado.*

*Sin embargo, debe tomarse en cuenta que esta condición es suficiente mas no necesaria, ya que si se adopta la política de **IHH(F)**$\leq\theta$ se pueden dar casos en que no se cumpla la relación $f_i \leq \theta V$. La prueba de esto también es laboriosa ya que implica estudiar las condiciones **KKT** para un problema de optimización no convexo. Los interesados pueden revisar Márquez Diez-Canedo (2002). En general se demuestra que si **IHH(F)**$\leq\theta$ se cumple*

$$f_i \leq [\,1 + (\,(N\theta -1)\,(N-1)\,)^{1/2}] \,/\, N < \theta^{1/2}\, V$$

Lo interesante de este resultado es que la imposición de una restricción al índice de concentración acota el máximo crédito superior e inferiormente, y se sabe que ningún crédito puede exceder la cota superior, que en este caso es $\theta^{1/2}V$ que es mayor que θV.

*Es deseable tener un buen índice de concentración ya que facilita las comparaciones en términos de concentración de riesgos entre diferentes instituciones (clientes, empresas, departamentos, áreas de negocios). Como se ha visto, el **IHH** es conveniente dado que, aparte de medir la concentración, está directamente relacionado con el riesgo y provee un mecanismo rápido para comprobar la suficiencia de reservas financieras. En las siguientes secciones se verá que el concepto es robusto bajo condiciones más generales.*

2.2.2. OPTIMIZACIÓN DE LAS DECISIONES

El proceso de toma de decisiones implica seleccionar los valores de las variables de decisión w_i de tal forma que se cumplan las condiciones matemáticas que se han presentado y se optimice una función de rendimiento que podría ser el valor esperado de las ganancias, que se puede expresar como:

$$U = \Sigma_{=1,N}\, (\varphi_i - p\,\mu_i)\, w_i$$

*La restricción que sede cumplir está relacionada con el **VaR**$_\alpha$, que en términos de las variables de decisión se expresa como*

$$VaR_\alpha = p\,\Sigma_{i=1,N}\,\mu_i w_i + z_\alpha (p(1-p))^{1/2} (\Sigma_{i=1,N}\,\mu_i^2 w_i)^{1/2} \leq C + \Sigma_{=1,N}\,\varphi_i w_i$$

que es equivalente a

$$\Sigma_{i=1,N}\,(\,\varphi_i - p\,\mu_i)\, w_i - z_\alpha (p(1-p))^{1/2} (\Sigma_{i=1,N}\,\mu_i^2 w_i)^{1/2} \geq C$$

*De manera resumida el problema **P(α,C):** para selección de cartera de pólizas óptima, para un determinado nivel de confianza α y un nivel de reservas inicial **C**, se puede expresar como*

$$P(\alpha,C): = \{\, Max\ U = \Sigma_{i=1,N}\, (\varphi_i - p\mu_i)\, w_i \,|$$

$$\Sigma_{i=1,N}\,(\varphi_i - p\mu_i)\,w_i - z_\alpha(p(1-p))^{1/2}(\Sigma_{i=1,N}\,\mu_i^2\,w_i)^{1/2} \geq C$$
$$w_i \in \{0,1\}\,\}$$

P(α,C): *corresponde a un problema de programación binaria no-lineal (**PBNL**). Matricialmente **P(α):** puede expresarse como:*

$$P(\alpha,C): = \{\, Max\ U = c^T y \mid$$
$$c^T y - z_\alpha (d^T y)^{1/2} \geq C$$
$$y \in \{0,1\}\,\}$$

*donde **c** es un vector con elementos* φ_i-$p\mu_i$ *y **d** un vector con elementos* $p(1-p)\mu_i^2$.

2.3 CLIENTES CORRELACIONADOS

2.3.1. CONDICIONES DE SUFICIENCIA

Considérese el caso general donde las pólizas tienen diferentes probabilidades de siniestro y, además, están correlacionados entre sí. Supóngase que la distribución de probabilidad de siniestro se puede caracterizar mediante un vector de probabilidades esperadas π=$\{p_i\}$ *y la correspondiente matriz de varianza-covarianza **M**. **F** y **V** mantienen sus definiciones anteriores:*

$$F = \{\, f_i \,\} = \{\, \mu_i\, w_i \,\}$$

$$V = \Sigma_{i=1,N}\, w_i\, \mu_i$$

La relación del valor en riesgo queda como

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha (F^T M F)^{1/2} \leq K = C + \eta y$$

lo que en forma extendida es igual a

$$VaR_\alpha = \Sigma_{i=1,N}\, p_i \mu_i\, w_i - z_\alpha\,(\Sigma_{i=1,N}\,\Sigma_{j=1,N}\, w_i\, \mu_i\, \sigma_{i,j}\, \mu_j\, w_j)^{1/2} \leq K = C + \eta y$$

donde $\sigma_{i,j}$ *son elementos de la matriz **M** y representan la covarianza entre la probabilidad de siniestro de la póliza **i** la probabilidad de la póliza **j**.*

*Dado que **M** es positiva definida, existe una matriz **Q** tal que*

$$M = Q\Lambda Q^T$$

donde Λ *es la matriz diagonal de valores característicos de **M** y **Q** es una matriz ortogonal de los vectores característicos de **M**, con la propiedad de que* $Q^{-1}=Q^T$

Sea $S=Q\Lambda^{1/2}Q^T$, *donde* $\Lambda^{1/2}$ *es la matriz diagonal formada con las raíces cuadradas de los valores característicos de **M**, de manera que* $M=S^TS$. *Si se hace la proyección **G=SF** se tiene*

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha (G^T G)^{1/2} \leq K = C + \eta y$$

Al multiplicar y dividir G^TG *por* $(1^TG)^2$, *y dividir todo por el valor de la cartera **V**, se obtiene:*

$$\psi \geq VaR_\alpha / V = p^* + z_\alpha\, \sigma^* IHH(G)^{1/2}$$

y

$$IHH(G) = \Sigma_{i=1,N}\, g_i^2 / (\Sigma_{i=1,N}\, g_i)^2 \leq [(\psi - p^*)/z_\alpha \sigma]^2 = \Theta(p, \psi, \alpha, \eta)$$

donde

$$p^* = \pi^T F/V$$

*es la **probabilidad esperada de siniestros** y*

$$\sigma^* = 1^T G/V = 1^T G/1^T F$$

*es una medida de su **desviación estándar**. De hecho, estas desigualdades tienen la misma forma que las calculadas para el anterior caso, excepto que ahora, el índice de Herfindahl-Hirschman se calcula sobre **G** en lugar de hacerse directamente sobre **F**. Este cambio de variable efectuado equivale a un redimensionamiento de **F** en función de la matriz **S** que representa la "raíz cuadrada" de la matriz de varianza-covarianza **M**. En términos de estadísticos, esto significa que las pólizas se redimensionan de acuerdo con las covarianzas entre las probabilidades de siniestro.*

*Debe notarse que este redimensionamiento implica que la concentración en números no es lo único que debe tomarse en cuenta. Si bien mucho riesgo en pocos clientes puede ser peligroso, seguramente es aún más peligroso que mucho riesgo esté concentrado en un grupo de clientes correlacionados. Visto de otra manera, en un momento dado puede representar más riesgo un grupo de muchas pólizas pequeñas, pero de varianzas grandes y altamente correlacionadas entre sí, que un pequeño grupo de pólizas grandes, cuya varianza y probabilidades de siniestro sean pequeñas y que además no estén muy correlacionadas ni entre sí, ni con otras pólizas. El redimensionamiento de **F** a través de **S**, implica que la varianza total de las pérdidas* $\sigma^* IHH(G)^{1/2}$*, se descompone en el efecto de la varianza de las probabilidades de siniestro, medida por* σ^**, y el efecto de la concentración, medida por **IHH(G)**.*

*Para fijar límites individuales a la cantidad de riesgo, que se puede asumir en una sola póliza, estos se deben establecer directamente sobre **F** y no sobre **G**. Con base en conceptos previamente analizados, se tiene que si se cumple* $F^T \leq \theta V 1^T$ *se cumple* $IHH(F) \leq \theta$*, y por lo tanto se puede afirmar*

$$IHH(G) \leq \theta\, IHH(G) / IHH(F) \leq [(\psi - p^*)/z_\alpha \sigma^*]^2$$

entonces

$$\theta \leq [(\psi - p^*)/z_\alpha \sigma^*]^2\, IHH(F) / IHH(G)$$

Con base en el "cociente de Rayleigh", se sabe que

$$\lambda_{min} \leq (\|G\| / \|F\|)^2 = (1^T G / 1^T F)^2 \leq \lambda_{max}$$

donde λ_{min} *y* λ_{max} *son los valores característicos menor y mayor de la matriz de varianza-covarianza **M**.*

Después de un poco de álgebra, se verifica que:

$$\theta \leq (1^T G / 1^T F)^2\, [(\psi - p^*) / z_\alpha \sigma^*]^2 / \lambda_{max} = [(\psi - p^*)/z_\alpha]^2 / \lambda_{max}$$

es una cota más estricta para el límite individual θ*. Por tanto, si se escoge* θ *que satisfaga cualquiera de las cotas anteriores, se garantiza que* $F \leq \theta 1 V$ *lo que implica el cumplimiento de*

$$\psi \geq p^* + z_\alpha\, \sigma^* IHH(G)^{1/2}$$

y

$$IHH(G) \leq [(\psi - p^*)/z_\alpha \sigma^*]^2$$

*Adicionalmente, se puede comprobar que la proyección de **F** a través de **S** no afecta los resultados del teorema 5.1 de la publicación de Márquez Diez-Canedo (2002), los cuales se analizaron en un numeral previo.*

Finalmente, la suficiencia de reservas se relaciona con el límite individual θ de la forma siguiente:

$$\psi \geq p^* + z_\alpha (\lambda_{max}\,\theta)^{1/2}$$

*Es interesante notar que en la expresión aparece el valor característico mayor de **M**, λ_{max}, que es una medida de la magnitud de la correlación entre las probabilidades de siniestro de las diferentes pólizas. Dado que se puede demostrar que $\lambda_{max}\,\theta \geq \sigma^2$ **IHH(G)**, y que la diferencia crece en la medida que aumenta la correlación positiva, todo es congruente con la noción intuitiva de que el aumento en la correlación de los riesgos incrementa el requisito de capitalización de los negocios.*

2.3.2. OPTIMIZACIÓN DE LAS DECISIONES

*Como en el caso anterior, el proceso de toma de decisiones implica seleccionar los valores de las variables de decisión w_i, agrupadas en el vector **y**, de tal forma que se cumplan las restricciones sobre VaR_α. La expresión para las ganancias es igual que para el caso anterior:*

$$U = \Sigma_{i=1,N} \, (\varphi_i - p\,\mu_i)\, w_i$$

La restricción relacionada con el VaR_α se expresa como

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha (F^T M F)^{1/2} \leq K = C + \eta^T y$$

En términos explícitos de las variables de decisión la anterior condición se puede expresar como

$$VaR_\alpha = \pi^T D y + z_\alpha (y^T D M D y)^{1/2} \leq K = C + \eta^T y$$

*donde **D** es un matriz diagonal con elementos μ_i cumpliéndose que*

$$F = Dy$$

*De manera resumida el problema **P(α,C):** para selección de cartera de pólizas óptima, para un determinado nivel de confianza α y un nivel de reservas inicial **C**, se puede expresar como*

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{ \,Max\ U = \Sigma_{i=1,N} \, (\varphi_i - p_i\mu_i)\, w_i \mid \\ \Sigma_{i=1,N} \, (\varphi_i - p_i\mu_i)\, w_i - z_\alpha \left(\Sigma_{i=1,N}\, \Sigma_{j=1,N}\, w_i\, \mu_i\, \sigma_{i,j}\, \mu_j\, w_j\right)^{1/2} \geq C \\ w_i \in \{0,1\} \,\} \end{gathered}$$

***P(α,C):** corresponde a un problema de programación binaria no-lineal (**PBNL**). Matricialmente **P(α):** puede expresarse como:*

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{ \,Max\ U = c^T y \mid \\ c^T y - z_\alpha (y^T D M D y)^{1/2} \geq C \\ y \in \{0,1\} \,\} \end{gathered}$$

2.4 DIFERENTES DIMENSIONES DE CONCENTRACIÓN

Generalmente las carteras de riesgos se agrupan de acuerdo con algún criterio práctico de clasificación, como: cliente, región geográfica, industria, nivel económico y/o productos, y dicha clasificación responde, de alguna *manera, a la forma en que las empresas hacen sus negocios. Como ya se mencionó, uno de los problemas difíciles es determinar ex-ante, dimensiones potencialmente peligrosas de concentración, y eso puede no tener nada que ver con la estructura organizacional. El modelo que a continuación, se presenta se basa en una segmentación arbitraria de la cartera, de manera que puede analizarse desde varios ángulos, y permite determinar los segmentos donde la concentración es potencialmente riesgosa. Esto permite la distinción de límites para cada segmento, y la evaluación de las implicaciones en términos de la suficiencia de reservas. En lo que sigue, se emplearán las palabras clase, segmento y dimensión de concentración como sinónimos.*

2.4.1. SEGMENTOS INDIVIDUALES.

Supóngase que se hace una partición arbitraria de $\mathbf{F}$ *en* $\mathbf{H}$ *segmentos,* $\mathbf{F=\{F_1, F_2, ..., F_h, ..., F_h\}}$ *donde* $\mathbf{F_h}$ *es un vector que contiene los riesgos que pertenecen al* **h***-ésimo segmento. Consecuentemente, los vectores* $\boldsymbol{\pi}$ *de probabilidades esperadas de siniestro,* $\mathbf{y}$ *de variables de decisión y* $\boldsymbol{\eta}$ *de primas de las pólizas, se parten como*

$$\pi = \{ \pi_1, \pi_2, \dots \pi_H\}$$
$$y = \{ y_1, y_2, \dots y_H\}$$
$$\eta = \{ \eta_1, \eta_2, \dots \eta_H\}$$

donde el índice **h** *se refiere al segmento* **h.** *La matriz de varianza-covarianza* **M** *se parte de la siguiente manera:*

$$M = \begin{vmatrix} M_1 & C_{12} & . & C_{1h} & . & C_{1H} \\ C_{21} & M_2 & . & . & . & C_{2H} \\ . & . & . & M_h & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ C_{H1} & C_{H2} & . & C_{IHH} & . & M_H \end{vmatrix}$$

Cada submatríz $\mathbf{M_h}$ *corresponde a la matriz de varianza-covarianza idiosincrática del grupo* **h** *con dimensión (*$\mathbf{N_h \times N_h}$*), donde* $\mathbf{N_h}$ *es el número de pólizas en el segmento. Todas estas matrices son positivas definidas al igual que* **M** *y se puede obtener la factorización correspondiente* $\mathbf{S_h}$*. Las matrices* $\mathbf{C_{hj}}$ *contienen las covarianzas de las probabilidades de siniestro entre las pólizas del grupo* **h** *y las del grupo* **j***. Sea* $\mathbf{V_h}$ *el valor de la cartera asociada al segmento* **h**

$$V_h = \Sigma_{i \in C(h)} f_i = 1^T F_h$$

donde **C(h)** *representa el conjunto de pólizas pertenecientes al segmento* **h.** *Se cumple*

$$V = \Sigma_h V_h = \Sigma_h 1^T F_h$$

Ahora, sea γ_h *es la proporción del capital asignado al segmento* **h** *y* $\mathbf{K_h}$ *las reservas de capital asignadas para cubrir los riesgos del segmento* **h,** *cumpliéndose*

$$K_h = \gamma_h K$$

El valor en riesgo para cada clase **h** *es*

$$VaR^h_\alpha = \pi_h^T F_h + z_\alpha (F^T R_h F)^{1/2} \leq K_h = \gamma_h K$$

donde la matriz $\mathbf{R_h}$ *tiene la siguiente estructura:*

$$\boldsymbol{R_h} = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & . & C_{1h} & . & 0 \\ . & . & C_{.h} & . & \\ C_{h1} & C_{h.} & M_h & C_{h.} & C_{IHH} \\ . & & C_{.h} & . & \\ 0 & . & C_{IHH} & . & 0 \end{array} \right|$$

Cada matriz $\boldsymbol{R_h}$ *solamente toma en cuenta las correlaciones entre las probabilidades de siniestro del grupo* $\boldsymbol{h}$ *con los de los demás grupos, pero elimina las correlaciones que no inciden directamente sobre el grupo en cuestión.*

Dividiendo ambos lados por el valor de la cartera $\boldsymbol{V_h}$*, y realizando el cambio de variable* $\boldsymbol{G_h=S_hF_h}$*, después de un poco de álgebra se llega a:*

$$IHH(G_h) \leq [\,(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha\, \sigma^*_h]^2 - 2\Omega_h / (1^T G_h)^2 = \Theta(p^*_h, \psi_h, \alpha, \eta_h)$$

donde

$$\sigma^*_h = (1^T G_h) / (1^T F_h) = (1^T G_h) / V_h$$

y

$$\Omega_h = \Sigma_{j \neq h}\, F_h^T\, C_{hj}\, F_j \;=\; F_h^T\, \Sigma_{j \neq h}\, C_{hj}\, F_j$$

Se debe notar que la cota de la concentración ahora incluye una corrección que tiene que ver con la correlación de los riesgos entre los diferentes segmentos (el segundo término en el lado derecho de la desigualdad). Esto concuerda con la intuición que una correlación alta de los riesgos del segmento $\boldsymbol{h}$ *con los riesgos de los otros segmentos, implica que se puede tolerar menos concentración en el segmento* $\boldsymbol{h}$*, si la correlación es negativa se aumenta el nivel de concentración permitido.*

Siguiendo procedimientos matemáticos similares a los utilizados en los numerales anteriores, se pueden obtener límites para los riesgos individuales de cada segmento como:

$$\theta_h \leq [\,(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha\, \sigma^*_h\,]^2\, IHH(F_h)/IHH(G_h) - 2\, \Omega_h / (1^T G_h)^2$$

Con base en el "cociente de Rayleigh" se obtiene la siguiente cota

$$\theta_h \leq [\,(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha\,]^2 / \lambda_{max} - 2\, \Omega_h\, V_h^2$$

Nótese que con respecto a los casos anteriores se hace un ajuste por la correlación que hay entre las probabilidades de siniestro del segmento $\boldsymbol{h}$ *con las de los demás segmentos, representado fundamentalmente por el término* $\boldsymbol{\Omega_h}$*. Cuando este término es positivo, como suele ser, el efecto es reducir las cotas sobre los segmentos individuales.*

En resumen, se hace evidente como se obtienen límites individuales diferenciados por segmento, que dependen de tres factores:

1. *La concentración de riesgo al interior del segmento, representada por el cociente* $\boldsymbol{IHH(F_h)/IHH(G_h)}$
2. *La razón de suficiencia de reservas idiosincrásica del segmento:* $[\,(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha\, \sigma_h\,]^2$
3. *La corrección por correlación con otros segmentos* $\boldsymbol{\Omega_h}$*.*

2.4.2. CARTERA INTEGRADA

Al integrar el análisis de los segmentos individuales a toda la cartera, es importante tomar en cuenta dos aspectos:

i) Que los pesos relativos de cada segmento en la cartera no alteren los resultados obtenidos para la cartera no segmentada.
ii) Que se mantenga la propiedad de aditividad, que permita sumar los requerimientos de reservas de los segmentos individuales, para obtener el requerimiento para la cartera en su conjunto. Esto se logra definiendo

$$\phi = (F^T F)^{1/2} / \Sigma_h (F^T R_h F)^{1/2}$$

y

$$IVaR^h_\alpha = \pi_h^T F_h + z_\alpha \phi (F^T R_h F)^{1/2} \leq K_h = \gamma_h K$$

donde se cumple que $0 \leq \gamma_h$ *y* $\Sigma_h \gamma_h = 1$.

$IVaR^h_\alpha$ *corresponde al valor en riesgo incremental (**IVaR**, Hallerbach 1999) debido al segmento **h**, que no es igual al valor en riesgo el segmento; la diferencia entre los dos índices es igual a*

$$VaR^h_\alpha - IVaR^h_\alpha = z_\alpha (1-\phi)(F^T R_h F)^{1/2}$$

Se puede probar que el valor en riesgo de la cartera integrada es la suma de los valores en riesgo incrementales, esto es

$$VaR_\alpha = \Sigma_h IVaR^h_\alpha = \pi^T F + z_\alpha (F^T M F)^{1/2} \leq K = C + \Sigma_h \eta_h^T y_h$$

Dividiendo por V_h*, con base en un análisis similar a los ya realizados, se tiene*

$$\psi_h \geq IVaR^h_\alpha / V_h = p^*_h + z_\alpha \phi \sigma_h [H(G_h) + 2 \Omega_h / (1^T G_h)^2]^{1/2}$$

Resolviendo para $H(G_h)$ *se obtiene*

$$H(G_h) \leq [(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha \phi \sigma_h]^2 - 2 \Omega_h / (1^T G_h)^2$$

y

$$\theta_h \leq [[(\psi_h - p^*_h) / z_\alpha \phi \sigma_h]^2 - 2 \Omega_h / (1^T G_h)^2] H(F_h) / H(G_h)$$

Lo anterior establece:

i) Las condiciones para suficiencia de reservas para los segmentos individuales,
ii) Un límite de concentración para el segmento y
iii) Provee la relación para los límites individuales.

Con base en el "cociente de Rayleigh" pueden obtenerse las expresiones para todo lo anterior en términos de los valores característicos.

Nótese que las expresiones se obtienen a partir de $IVaR^h_\alpha / V_h$ *de manera que el peso de los segmentos en la cartera no se toma en cuenta. Por lo tanto, una simple suma de términos puede ser engañosa en cuanto a suficiencia de reservas para la cartera integrada. Si* $\gamma_h = IVaR^h_\alpha / V_h$*, entonces, por construcción, si* $\psi_h \geq IVaR^h_\alpha / V_h$ *se satisface para todos los segmentos, entonces* $\psi = \Sigma_h \psi_h$ *asegura la suficiencia de reservas para la cartera integrada.*

El anterior análisis permite definir relaciones a partir de las cuales se puede establecer la suficiencia de reservas que se pueden usar como instrumentos normativos para determinar límites individuales, cambios en la composición de la cartera y/o ajustes al capital requerido para mantener suficiencia, si cambia el comportamiento de los siniestros en alguno, o todos, los segmentos.

Adicionalmente, la teoría presentada es la base para casos más generales que impliquen segmentaciones jerárquicas, o sea segmentos dentro de segmentos. Un ejemplo sería un primer nivel jerárquico asociado a sector industrial y luego un segmento dependiente relacionado con los clientes dentro del sector.

2.4.3. OPTIMIZACIÓN DE LAS DECISIONES

Como en los casos anteriores, el proceso de toma de decisiones implica seleccionar los valores de las variables de decisión $\mathbf{w_i}$ *de tal forma que se cumplan las restricciones sobre el valor en riesgo de la cartera integrada,* $\mathbf{VaR_\alpha}$*, y, si es el caso, el valor en riesgo para cada uno de los segmentos,* $\mathbf{VaR^h{}_\alpha}$ *, cuando estos tienen asignación específica de capital.*

Se consideran dos casos: i) cuando no se limita el valor en riesgo en cada segmento, y ii) cuando el valor en riesgo en cada segmento se limita con base en una asignación de reservas de capital para cada segmento.

2.4.3.1. RESERVAS INTEGRADAS

El primer caso es igual al problema sin considerar segmentos, tratado en el numeral anterior, ya que la segmentación no es tenida en cuenta en la estructuración de las reservas de capital. Por lo tanto, de manera resumida el problema $\mathbf{P(\alpha,C)}$***:*** *para selección de cartera se puede expresar como*

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{\ Max\ U = \Sigma_{=1,N}\ (\varphi_i - p_i\mu_i)\, w_i\ | \\ \Sigma_{=1,N}\ (\varphi_i - p_i\mu_i)\, w_i - z_\alpha\ (\Sigma_{i=1,N}\ \Sigma_{j=1,N}\, w_i\, \mu_i\, \sigma_{i,j}\, \mu_j\, w_j)^{1/2} \geq C \\ w_i \in \{0,1\}\ \} \end{gathered}$$

Matricialmente $\mathbf{P(\alpha,C)}$***:*** *puede expresarse como:*

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{\ Max\ U = c^T w\ | \\ c^T y - z_\alpha (y^T DMDy)^{1/2} \geq C \\ y \in \{0,1\}\ \} \end{gathered}$$

2.4.3.2. RESERVAS SEGMENTADAS

En este caso se deben tener en cuenta los principios con respecto a la estructuración de las reservas de capital para cubrimiento de los riesgos asociados a las pólizas. Se consideran dos casos, cuando:

i) *Las reservas de capital por segmento están preestablecidas como un porcentaje de las reservas iniciales totales más las primas propias del segmento, y*

ii) *La estructuración de las reservas es una variable de decisión y por lo tanto un resultado del proceso de optimización.*

2.4.3.2.1. RESERVAS PRE-ESTABLECIDAS

En este caso, la expresión para las ganancias es igual que para el caso anterior, pero por conveniencia se presentan agrupadas por segmentos:

$$U = \Sigma_h\ \Sigma_{i \in C(h)}\ (\varphi_i - p\mu_i)\ w_i = \Sigma_h\ c_h{}^T y_h$$

donde $\mathbf{c}_h$ es un vector definido apropiadamente de acuerdo con $\mathbf{y}_h$, con componentes $\{\varphi_i - p\mu_i\}$.

Al existir asignación de reservas de capital por segmento se debe incluir la restricción sobre el valor en riesgo del segmento, esto es

$$VaR^h_\alpha = \pi_h^T F_h + z_\alpha (F_h^T M_h F_h + 2\, F_h^T \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj} F_j)^{1/2} \leq \gamma_h C + \Sigma_h\, \eta_h^T y_h$$

En términos explícitos de los vectores de las variables de decisión, $\mathbf{y}_h$, la anterior condición se puede expresar como

$$VaR^h_\alpha = \pi_h^T D_h y_h + z_\alpha (y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \leq \gamma_h (C + \Sigma_h\, \eta_h^T y_h)$$

que es equivalente a

$$c_h^T y_h - z_\alpha (y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq \gamma_h C$$

La restricción relacionada con el $\mathbf{VaR}_\alpha$ de la cartera se expresa como

$$VaR_\alpha = \Sigma_h\, \pi_h^T D_h y_h + z_\alpha (\Sigma_h\, y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, \Sigma_h\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \leq C + \Sigma_h\, \eta_h^T y_h$$

que es equivalente a

$$\Sigma_h\, c_h^T y_h - z_\alpha (\Sigma_h\, y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, \Sigma_h\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq C$$

Matricialmente el problema para determinar la cartera óptima, $\mathbf{P(\alpha,C):}$, puede expresarse como:

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{\ Max\ U = \Sigma_h\, c_h^T y_h \mid \\ c_h^T y_h - z_\alpha (y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq \gamma_h C \quad \forall h \\ \Sigma_h\, c_h^T y_h - z_\alpha (\Sigma_h\, y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, \Sigma_h\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq C \\ y_h \in \{0,1\} \quad \forall h\} \end{gathered}$$

2.4.3.2.2. ESTRUCTURACIÓN DE CONCENTRACIÓN DE PASIVOS

En el caso de estructuración de pasivos tiene que la fracción γ_h es una variable de decisión, de manera tal que el modelo de optimización determine la proporción de pólizas que óptimamente se debe asignar a cada segmento/sector/negocio. Para lograr lo anterior se debe introducir las restricciones de convexidad sobre las fracciones, o sea

$$0 \leq \gamma_h \quad y \quad \Sigma_h\, \gamma_h = 1$$

El problema queda definido como

$$\begin{gathered} P(\alpha,C): = \{\ Max\ U = \Sigma_h\, c_h^T y_h \mid \\ c_h^T y_h - z_\alpha (y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq \gamma_h C \quad \forall h \\ \Sigma_h\, c_h^T y_h - z_\alpha (\Sigma_h\, y_h^T D_h M_h D_h y_h + 2\, \Sigma_h\, y_h^T D_h \Sigma_{j\neq h}\, C_{hj}\, D_j y_j)^{1/2} \geq C \\ \Sigma_h\, \gamma_h = 1 \\ y_h \in [0,1]\ ,\ 0 \leq \gamma_h \quad \forall h\ \} \end{gathered}$$

3. CONCLUSIONES

La metodología matemática propuesta para administrar la concentración de riesgos proporcionan fórmulas explícitas para:

1. *Medir el riesgo corporativo asociado a la concentración, y*
2. *Cuantificar precisamente acciones normativas para mantener la suficiencia de reservas de capital de la organización*

Además, el modelo proporciona medios simples para determinar los efectos de la correlación y la concentración de la cartera de riesgos. Dado que los límites individuales y el índice de Herfindahl-Hirschman están relacionados con la concentración, y las medidas están sujetas a la misma cota, cualquier indicador puede usarse como instrumento normativo. Además, no hay razón para no usar ambas medidas de manera conjunta.

La optimización del proceso permite determinar la distribución optima de riesgos que disminuyen los riesgos de concentración en entidades financieras.

.

REFERENCIAS

Hallerbach, W. G. (1999) "Decomposing Portfolio Value-at-Risk: A General Analysis" Working Paper Erasmus University Rotterdam and Tinbergen Institute Graduate School of Economics (e-mail: hallerbach@few.eur.nl) May 1999

Kealhofer, S.(1998) "Portfolio Management of Default Risk". KMV Corporation, 1998.(Revised.)

Markowitz, H. (1959). "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments". New York: John Wiley & Sons.

Márquez Diez-Canedo (2002), J. "Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios". Documento de Investigación No. 2002-04, Dirección General de Análisis del Sistema Financiero, Banco de México (Abril 2002)

Shy, Oz. (1995). "Industrial Organization: Theory and Applications". The MIT press.

Tirole, Jean. (1995). "The Theory of Industrial Organization". M. I. T. Press.