



**CONTROL DE RIESGOS FINANCIEROS CORPORATIVOS MEDIANTE
ASSET LIABILITY MANAGEMENT (ALM).
CASO: LA INDUSTRIA DE SEGUROS**

**Jesús Velásquez Bermúdez
Danilo Abril Hernández
Rodrigo Cáliz Ospino
DecisionWare Ltda.**

**Martha Fernanda Flórez Torres
Magíster Ingeniería Industrial
Universidad de Los Andes**

DECISIONWARE
DOCUMENTO DE TRABAJO DW-DT-035

ESTE DOCUMENTO CONTIENE INFORMACIÓN CONFIDENCIAL PROPIEDAD INTELECTUAL DE DECISIONWARE LTDA.; SE ENTREGA CON EL ENTENDIMIENTO DE QUE SE UTILIZARÁ EXCLUSIVAMENTE EN LA EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD TÉCNICA DE DW Y QUE LO MANTENDRÁ EN FORMA CONFIDENCIAL, GUARDÁNDOLO CONTRA INSPECCIÓN DE TERCERAS PERSONAS NO AUTORIZADAS EXPLÍCITAMENTE POR DECISIONWARE LTDA

**Bogotá, febrero de 2005
(Revisado 2015)**

**CONTROL DE RIESGOS FINANCIEROS MEDIANTE
ASSETS LIABILITIES MANAGEMENT (ALM)
CASO: LA INDUSTRIA DE SEGUROS**

*Jesús Velásquez Bermúdez
Danilo Abril Hernández
Rodrigo Cáliz Ospino
DecisionWare Ltda.*

*Martha Fernanda Flórez Torres
Universidad de Los Andes*

ESTE DOCUMENTO CONTIENE INFORMACIÓN CONFIDENCIAL PROPIEDAD INTELECTUAL DE DECISIONWARE LTDA.; SE ENTREGA CON EL ENTENDIMIENTO DE QUE SE UTILIZARÁ EXCLUSIVAMENTE EN LA EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD TÉCNICA DE DW Y QUE LO MANTENDRÁ EN FORMA CONFIDENCIAL, GUARDÁNDOLO CONTRA INSPECCIÓN DE TERCERAS PERSONAS NO AUTORIZADAS EXPLÍCITAMENTE POR DECISIONWARE LTDA

RESUMEN

El trabajo presenta los fundamentos metodológicos y la aplicación de los conceptos de Enterprise Risk Management (ERM) y de Asset Liability Management (ALM) como un medio para implementar los lineamientos que llegan desde los organismos internacionales y las entidades multilaterales y que se plasman en reglamentaciones nacionales orientadas a la medición, la supervisión y el control del riesgo corporativo de las organizaciones del sector financiero.

Como resultado práctico se presenta la implementación de las metodologías matemáticas en un modelo desarrollado para una empresa aseguradora hipotética utilizando datos “realistas” del sector asegurador colombiano. Se presenta el modelaje de: i) los procesos estocásticos, ii) la generación de escenarios y iii) la optimización estocástica incluyendo restricciones al CVaR (Conditional Value at Risk). Los modelos implementados utilizan tecnologías computacionales disponibles comercialmente.



DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER

1. INTRODUCCIÓN

La administración y control de riesgos es un campo que ha tomado mucha importancia dentro del manejo de las organizaciones, especialmente en las entidades financieras por la magnitud de las consecuencias que trae a la sociedad su manejo inapropiado. Desde hace un tiempo, entidades reguladoras tal como la Superintendencia Bancaria de Colombia e internacionalmente el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (Banco de Pagos Internacionales) así como los propios accionistas de las entidades, han venido exigiendo una revisión de las políticas y de los procesos de administración de los riesgos a los que se encuentra sometida la entidad con el fin de evitar, o por lo menos minimizar, los riesgos y la pérdida social que puede enfrentar tanto la sociedad, como la propia entidad, por medio de la implantación de un Sistema general de Administración de Riesgos (SAR). De lo anterior se deriva que conocer a un determinado nivel de probabilidad cuanto es el valor máximo de la pérdida de la entidad ante los distintos riesgos que afronta, es vital no sólo desde el punto de vista del control de los mismos, sino también desde la evaluación de los resultados de la operación de la entidad.

En una economía, el sector asegurador juega un papel muy importante. En la medida en que un país avanza en su proceso de desarrollo, los mayores niveles de inversión y actividad económica involucran mayores riesgos. Las compañías de seguros, por su parte, proporcionan seguridad a las familias y a las empresas al restituir las pérdidas causadas por sucesos imprevistos. Por otra parte, las reservas que constituyen las compañías para atender posibles siniestros se acumulan y son dirigidas hacia la inversión en papeles financieros, contribuyendo de esta manera al crecimiento y al desarrollo del mercado de capitales. De lo anterior y tomando como referencia Arbeláez (2001), el sector asegurador es un importante generador de recursos de ahorro institucional que ha promovido el desarrollo del mercado de capitales alrededor del mundo y ha canalizado inversión hacia los sectores industrial, financiero y constructor principalmente; en Colombia hasta la década de los ochenta las compañías de seguros aportaban más del 60% de los recursos movilizados por inversionistas institucionales. En los años 90, si bien los fondos de pensiones y cesantías se han convertido en los mayores generadores de este tipo de recursos, el sector asegurador canalizó un monto de inversión cercano al 2% del PIB. Sin embargo, el principal determinante del desempeño que el sector asegurador muestre como inversionista institucional, esta centrado tanto en la regulación que se estipule en cuanto a las inversiones, como por las condiciones dinámicas de la economía. Dicha regulación sobre las inversiones se justifica para garantizar la solidez y la solvencia de las compañías de seguros, y por tanto, su capacidad de respuesta ante los asegurados.

Por estipulación de la Superintendencia Bancaria de Colombia, toda compañía aseguradora situada en el país debe tener implementado dentro de su organización, no sólo un Sistema de Administración de Riesgos (SAR) por ser una entidad vigilada, sino que también debe contar con un Sistema Especial de Administración de Riesgos de Seguros (SEARS), el cual busca identificar, medir, evaluar y controlar los riesgos inherentes a su actividad para prevenir posibles problemas en cuanto a su patrimonio y su solvencia y para brindar protección a los asegurados frente a una quiebra de la compañía.

Lo que se pretende con el presente trabajo de investigación es implementar una metodología basada en los conceptos de **Enterprise Risk Management (ERM)**, que permite una administración corporativa del riesgo, tomando como herramienta para ello, un modelo de **Assets Liabilities Management (ALM)** de forma tal que las compañías aseguradoras del país cumplan con las exigencias de medición y de control de riesgos impuestas por la Superintendencia Bancaria de Colombia.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1. EL ACUERDO DE BASILEA

El Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria (Basle Committee on Banking Supervision), conocido comúnmente como el Comité de Basilea, se estableció en 1974 y se reúne cuatro veces al año. Está compuesto por los gobernadores de los bancos centrales y los encargados de la supervisión bancaria provenientes de Alemania, Bélgica, Canadá, España, Estados Unidos, Francia, Holanda, Italia, Japón, Luxemburgo, Reino Unido, Suecia y Suiza.

El Comité de Basilea no posee ninguna autoridad supervisora internacional. Se dedica principalmente a elaborar propuestas y consideraciones de carácter general, para que los supervisores y reguladores bancarios las tengan en cuenta en el momento de implementarlas en sus propios países. El objetivo del Comité es hacer compatible la regulación financiera internacional con el fin de que se adopten las mejores prácticas de supervisión, y que los bancos internacionales cumplan con los requisitos de la regulación.

En 1988 el Comité introdujo un sistema de medición de capital conocido como el Acuerdo de Capital de Basilea, que fue adoptado por varios países, no solamente los pertenecientes al Comité. En 1999 el Comité propuso la creación de un nuevo acuerdo de capital que reemplazará al de 1988, el cual se espera esté listo para ser introducido en 2004.

El 16 de enero de 2001, el Comité de Basilea publicó Basilea II, la base para un nuevo acuerdo. El documento, segundo de este tipo, refina la propuesta publicada en junio del 2000 y abre un período consultivo que se cerrará en mayo. Hacia final de año se publicará la versión final del acuerdo que comenzaría a implementarse en 2004.

Basilea II propone un cambio de un alcance mucho mayor del que se esperaba: la amplitud de los riesgos, la sensibilidad al riesgo en las ponderaciones para el ratio de capital y las alternativas de aplicación que ofrece no deben entenderse como una mejora al cuadro vigente desde 1988 (esto ya pasó en 1996), sino como un cambio substancial que permitirá contemplar los mismos instrumentos para la gestión del riesgo y para la supervisión de la buena práctica bancaria.

Los tres pilares de Basilea II son:

- Las normas de 1988 fijan en el 8% el ratio mínimo de solvencia. Basilea II introduce criterios flexibles y aumenta el margen de actuación de las entidades financieras. Permitirá que los bancos adapten las condiciones en función de la complejidad de las operaciones y de su política de control de riesgos. El método para el cálculo del riesgo de crédito será a su vez más elaborado. Existen dos propuestas. La primera es un modelo estandarizado similar al actual, pero más sensible al riesgo. La segunda se basa en el rating interno de cada banco (IRB). En caso del IRB, la metodología sugerida a los bancos para realizar la estimación de la solvencia crediticia de cada prestatario consistiría en calcular su probabilidad de quiebra asociada, aparte de otras variables externas. Los resultados servirían de punto de partida para estimar las futuras pérdidas potenciales.
- Otro de los pilares de Basilea II es el proceso de supervisión. La propuesta remarca la importancia de que cada entidad desarrolle un proceso de cálculo, dadas sus características particulares y el entorno en que se desenvuelve. Los supervisores serán los encargados de evaluar cómo calculan los bancos su adecuación patrimonial. Se establecen los siguientes principios de vigilancia cautelar:
 - Las entidades deben contar con procedimientos de evaluación del nivel de sus fondos propios en función de su nivel de riesgo.
 - Las entidades supervisoras, deben juzgar la calidad de los procedimientos internos de valoración del nivel de los fondos propios.
 - Las entidades supervisoras deben exigir un nivel de capital superior a las exigencias mínimas del acuerdo.
- Por último, está la disciplina de mercado. El BIS propone la divulgación de información efectiva y establece recomendaciones para distintas áreas, incluyendo la forma como un banco calcula su adecuación patrimonial y la metodología a utilizar.

El nuevo conjunto de medidas mejora claramente las existentes, por su mejor capacidad de discernir los diferentes niveles de riesgo que va a traer como consecuencia la penalización de prácticas incorrectas que encontraban una menor asignación de capital mediante la asunción de riesgos excesivos con el mismo porcentaje de recursos propios. De lo anterior se puede deducir que en última instancia lo que pretende Basilea es establecer un sistema de administración de riesgos para cada empresa, cumpliendo con ciertas exigencias.

El nuevo acuerdo de Basilea, al igual que el acuerdo inicial, pretende adaptarse a las realidades del sector bancario y no a las del sector seguros, ya que éstas son diferentes tanto en los riesgos que deben tenerse en cuenta, como en el objetivo de su sistema cautelar (el objetivo cautelar de Basilea consiste en reforzar la estabilidad y solidez del sistema bancario internacional, mientras que en el ámbito de seguros, el control cautelar está justificado por la protección de los asegurados contra el riesgo de quiebra de la compañía). Sin embargo, este nuevo acuerdo proporciona ideas para el proyecto de solvencia 2 que se está gestando y estará encaminado a seguros.

Lo que refleja claramente el acuerdo de Basilea, aunque éste no sea aplicado directamente al sector seguros, es la preocupación que existe a nivel mundial en torno a la administración de riesgos y que ha llevado a establecer ciertas normas que las entidades bancarias deben cumplir, y la preocupación existente por tener también reglas que deban cumplir las compañías de seguros para la administración de sus riesgos.

2.2. SISTEMAS DE ADMINISTRACIÓN DE RIESGOS EN COLOMBIA (SAR).

*La Superintendencia Bancaria de Colombia (Super-Bancaria), en los últimos años ha adoptado para todas las entidades vigiladas un esquema de supervisión basada en riesgos el cual se centra en los principios de Administración de Riesgos y Gobierno Corporativo impulsados por el Comité de Basilea en Supervisión Bancaria (Comité del BIS, Banks for International Settlements) y la Asociación Internacional de Supervisores de Seguros, IAIS, entidad vinculada al BIS encargada de formular y promover la implementación de principios y estándares de supervisión de seguros. A este esquema se le dio el nombre de **Sistema de Administración de Riesgos**, conocido como: **SAR**.*

Desde el año 2000 y como parte de lo anterior, se adoptaron estándares mínimos de Gobierno Corporativo para operaciones específicas, de igual forma como se adoptó la obligación de implementar sistemas de identificación, medición y control de riesgos. La normativa de la Super-Bancaria se manifiesta por medio de los siguientes documentos:

- *Circular Externa 088 de 2002: Parámetros mínimos de administración de riesgos para las operaciones de tesorería.*
- *Circular Externa 011 de 2002, Cartas Circulares 31 y 59 de 2002 y Circular Externa 014 de 2003: Principios y criterios generales que se deben adoptar para la evaluación del riesgo de crédito.*
- *Circular Externa 052 de 2002: Reglas especiales sobre gestión de riesgos en las aseguradoras.*
- *Circular Externa 046 de 2002 y Circular Externa 025 de 2003: Reglas para la prevención y control de lavado de activos.*

*La supervisión basada en la evaluación de la gestión de riesgos de las entidades vigiladas por la Super-Bancaria se fundamenta no sólo en la capacidad que estas tengan de administrar aquellos riesgos comunes a la actividad de los servicios financieros, sino también en la capacidad que tengan de gestionar con éxito los riesgos particulares a la especie a la que pertenecen adoptando, como parte integral de su Sistema General de Administración de Riesgos (**SAR**), sistemas especiales de identificación, de medición, de evaluación y de control de aquellos riesgos particulares a su actividad que operen coordinadamente con los presupuestos generales de administración de riesgos. Hasta la fecha, la Super-Bancaria ha normado dos sistemas de administración de riesgos:*

- **SARC:** Sistema de Administración del Riesgo Crediticio
- **SEARS:** Sistema Especial de Administración de Riesgos en Seguros

Tanto el SARC como el SEARS son sistemas orientados a la identificación, la medición, la evaluación y el control de aquellos riesgos particulares a las actividades crediticia y aseguradora que deben operar coordinadamente con los presupuestos generales de administración de riesgos de la entidad financiera. Esta investigación dará respuestas a solicitudes específicas de los anteriores sistemas de control y servirá como referencia para entidades que operan en el sector financiero pero que no se rigen por sistemas generales de control de riesgos, como pueden ser los fondos de pensiones y otras entidades similares. La siguiente gráfica presenta la estructura de medición y control de riesgos que ha establecido la Super-Bancaria a nivel del Gobierno Corporativo de las entidades financieras en Colombia.



Estructura Gobierno Corporativo.
Fuente: (FASECOLDA 2003).

2.2.1 SISTEMA DE ADMINISTRACIÓN DEL RIESGO CREDITICIO: SARC

Los cambios que experimenta el sector financiero en relación con el tema de administración de riesgo crediticio responden a una tendencia a nivel internacional que propende por la búsqueda de mecanismos más idóneos para gestionar el riesgo en un entorno cada vez más complejo. Es así como se han adoptado medidas y se ha ajustado la normatividad bancaria colombiana de acuerdo con los nuevos estándares en respuesta al nuevo Acuerdo de Basilea, que, si bien no es de carácter obligatorio, ha sido tomado como un importante parámetro de referencia para actualizar los sistemas de gestión de riesgos.

SARC es una estructura dinámica que, compuesta por una serie de metodologías y procesos definidos para gestionar el riesgo crediticio, sustentándose en la definición de políticas claras con un enfoque predictivo y en procesos de control. El fin último del sistema es la anticipación del incumplimiento para determinar los requerimientos de capital que debe tener una entidad crediticia, de tal forma que se haga una evaluación constante de los niveles de exposición al riesgo y se registren las provisiones del caso, ajustando la operación bancaria a la realidad económica previsible.

De acuerdo con la Super-Bancaria tiene como objetivo “la definición de una política clara de administración de riesgo por parte de la Junta Directiva de la entidad”, lo que “constituye la columna vertebral del sistema general de administración de riesgo crediticio”.

La circular externa 011 de 2002 que modifica el Capítulo II de la Circular Externa No. 100 de 1995, define los parámetros generales que debe observar un establecimiento de crédito para gestionar el riesgo crediticio; y la Carta Circular 31 de 2002, que exige la definición de un Sistema de Administración de Riesgo de Crédito.

Entre otras cosas circular 11 establece que:

- El pilar fundamental de la supervisión bancaria está en la gestión interna del riesgo por parte de las entidades financieras
- Se debe fortalecer la gestión interna del riesgo en el tema del riesgo de crédito, generando una cultura y prácticas de alto nivel técnico en la administración del mismo.
- Es obligación fundamental de las entidades vigiladas mantener permanentemente una adecuada administración del riesgo crediticio, para lo cual deberán desarrollar un Sistema de Administración del Riesgo Crediticio (SARC).

A su vez la Carta Circular 31 define que en adelante el proceso de evaluación y administración de riesgo se soportará tal como ya hemos mencionado en modelos predictivos que nos permitan de manera cierta calcular la probabilidad de incumplimiento del cliente y con ello el riesgo de crédito mismo, incluso antes de desembolsar el crédito.

La definición dada por la Superintendencia Bancaria al riesgo crediticio es la siguiente: “posibilidad de que una entidad incurra en pérdidas y se disminuya el valor de sus activos, como consecuencia de que sus deudores fallen en el cumplimiento oportuno o cumplan imperfectamente los términos acordados en los contratos de crédito.”

Las entidades vigiladas deben evaluar permanentemente el riesgo crediticio de estos activos y la capacidad de pago del respectivo deudor. Esto aplica tanto en el momento de otorgar créditos, como a lo largo de la vida de los mismos y cuando se produzcan reestructuraciones de los respectivos contratos. La misma circular establece que los aspectos mínimos que se deben considerar en el análisis de un proyecto crediticio son:

La Capacidad de pago del deudor:

- Analizar los flujos de ingresos y egresos, así como el flujo de caja del deudor y del proyecto financiado o a financiar.
- La solvencia del deudor, a través de variables como el nivel de endeudamiento y la calidad y composición de los activos, pasivos, patrimonio y contingencias del deudor y/o del proyecto.
- Información sobre el cumplimiento actual y pasado de las obligaciones del deudor. La atención oportuna de todas las cuotas.
- Historia financiera y crediticia, proveniente de centrales de riesgo, calificadoras de riesgo, del mismo deudor o cualquier otra fuente que resulte relevante.
- El número de veces que el crédito ha sido reestructurado y la naturaleza de la(s) respectiva(s) reestructuración(es). Se entiende que entre más operaciones reestructuradas se hayan otorgado a un mismo deudor, mayor será el riesgo de no pago de la obligación.

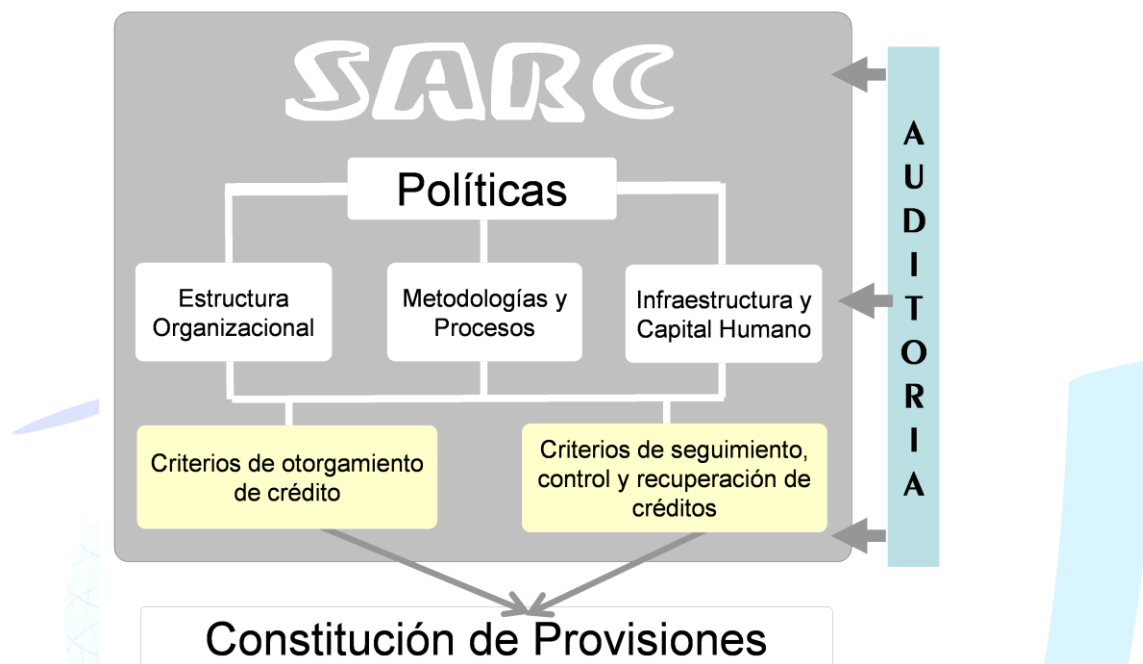
Las garantías que respaldan la operación están relacionadas con los factores que se deben evaluar como mínimo son la naturaleza, valor, eficacia, cobertura y liquidez de las garantías. Se deben buscar garantías idóneas para respaldar los créditos concedidos, de las cuales se espera:

- Un debido perfeccionamiento (cumplimiento de todos los trámites de registro que sean necesarios).
- Que tengan un valor establecido con base en criterios técnicos y objetivos
- Un respaldo jurídicamente eficaz al pago de la obligación garantizada (por ejemplo, que no se encuentren embargadas)
- Que exista posibilidad de realización razonablemente adecuada (sin costos excesivos).
- Reconocimiento de que la garantía no elimina el riesgo, da elementos adicionales de manejo y en el futuro mitigará la pérdida.

El sistema de administración del riesgo crediticio (SARC) está conformado por los siguientes componentes básicos:

- Políticas claras de administración de riesgos
- Estructura organizacional adecuada
- Metodologías y procesos apropiados para la gestión de riesgos
- Infraestructura y capital humano idóneos
- Proceso de auditoría general.

Lo anterior se resume esquemáticamente en el siguiente gráfico:

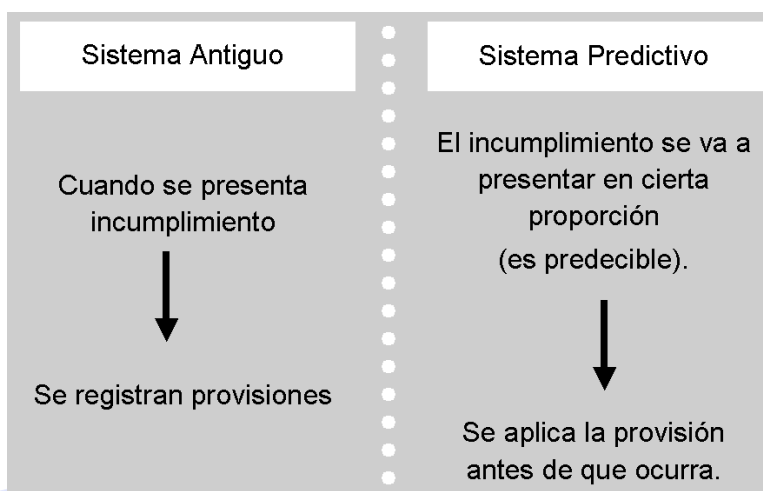


Como ya se mencionó, expresa también la Super-Bancaria que la definición de una política clara de administración de riesgo por parte de la Junta Directiva de la entidad constituye la columna vertebral del sistema general de administración de riesgo crediticio, de donde deben surgir políticas específicas así:

- Política de exposición y límites
- Política de otorgamiento de crédito
- Política de constitución de provisiones
- Política de estimación de capital económico
- Política de recuperación

El siguiente diagrama resume la posición del SARC con respecto al manejo del riesgo

DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER



Los requerimientos del Nuevo Acuerdo de Basilea determinan que como mínimo los datos para la asignación de probabilidades deben tener una profundidad histórica de 5 años. El cálculo de esta probabilidad de incumplimiento es el punto de partida básico en lo referente a la cuantificación y categorización del riesgo.

De acuerdo con el SARC, los Bancos deben establecer modelos predictivos que deben revisarse periódicamente para ajustarlos a los cambios experimentados por los factores que determinan el nivel de riesgo y a posibles cambios poblacionales en la cartera.

Sin importar que modelo se aplique para el análisis del riesgo crediticio, antes de asumir el riesgo, el Banco está obligado a evaluarlo y durante el desarrollo de la operación crediticia y hasta el pago final de la misma, la entidad tiene la obligación de administrarlo y legalmente de continuar estudiándolo. Como existe la posibilidad de que se presenten problemas con los créditos, en particular, es factible que algunos clientes incumplan su promesa de pagar en las fechas definidas, y por tanto entren en default (incumplimiento del deudor), se deben hacer algunos ajustes a las cuentas de ingresos y gastos del Banco, siendo necesario registrar provisiones. Una **provisión** es un gasto que se reconoce en un período, anticipando con ello la pérdida futura que se puede dar si el deudor no cancela sus obligaciones.

2.2.2 SISTEMA ESPECIAL DE ADMINISTRACIÓN DE RIESGOS DE SEGUROS: SEARS.

2.2.2.1. ASPECTOS GENERALES

Las entidades aseguradoras se encuentran expuestas, además de los riesgos generales a que se expone toda entidad financiera (como son, entre otros, los riesgos de crédito, mercado, liquidez, operacional, legal, estratégico y reputacional), a riesgos particulares de la actividad aseguradora como serían los riesgos de suscripción y de insuficiencia de reservas técnicas. Estos últimos también suponen la posibilidad de afectar los resultados potenciales y, por ende, de generar una pérdida del valor económico del patrimonio de las entidades aseguradoras y de su reputación en el mercado con efectos nocivos para su solvencia y viabilidad financiera.

La supervisión basada en la evaluación de la gestión de riesgos de las entidades vigiladas por la Superintendencia Bancaria se fundamenta no sólo en la capacidad que estas tengan de administrar aquellos riesgos comunes a la actividad de los servicios financieros, sino también en la capacidad que tengan de gestionar con éxito los riesgos particulares a la especie a que pertenecen.

En tal medida, es vital que las entidades aseguradoras adopten, como parte integral de su Sistema General de Administración de Riesgos (SAR), sistemas especiales de identificación, de medición, de evaluación y de control de

aquellos riesgos particulares a su actividad que operen coordinadamente con los presupuestos generales de administración de riesgos.

Toda entidad aseguradora debe diseñar y adoptar su propio Sistema Especial de Administración de Riesgos de Seguros (SEARS) que le permita realizar una adecuada gestión de los riesgos propios de su actividad. El SEARS deberá considerar los parámetros establecidos por la Superintendencia Bancaria, sin perjuicio de aplicar para tal propósito aquellos principios generales de gestión de riesgos establecidos por la misma.

El SEARS se define como un sistema especial de identificación, de medición, de evaluación y de control de aquellos riesgos particulares a la actividad aseguradora que opera coordinadamente con los presupuestos generales de administración de riesgos.

Al diseñar y adoptar su propio SEARS las entidades aseguradoras deben tener en cuenta que cualquiera que sea el sistema que adopten, el mismo debe contar con las siguientes tres características:

- **Cuantificación del riesgo**
El sistema debe permitir estimar o cuantificar las posibles pérdidas por la exposición a aquellos riesgos que la Superintendencia Bancaria determine como cuantificables mediante circular externa.
- **Cubrimiento del riesgo**
El sistema debe permitir determinar el procedimiento a seguir a fin de mitigar o controlar cada uno de los riesgos establecidos en el siguiente numeral del presente capítulo. El sistema debe estar en capacidad de permitirle a la entidad determinar el procedimiento a adoptar para mejorar sus procesos de control y mitigación de riesgos y, eventualmente, los niveles adecuados de reservas técnicas, provisiones o patrimonio que se requieran para mantener la exposición a un riesgo en niveles aceptables.
- **Control del riesgo**
El sistema debe prever mecanismos permanentes y eficaces de control de riesgos para monitorear los existentes e identificar nuevos riesgos que deban ser cuantificados.

2.2.2.2 ADOPCIÓN DE POLÍTICAS SOBRE ASUNCIÓN DE RIESGOS.

La Junta Directiva de cada entidad deberá pronunciarse de manera explícita acerca de las condiciones y el ambiente de control dentro del cual la administración ejercerá las prácticas de retención y cesión de riesgos. Para este efecto tomará en cuenta los riesgos que se definen a continuación:

- **Riesgo de crédito.** Se entiende por riesgo de crédito de las entidades aseguradoras, la posibilidad de incurrir en pérdidas por el no pago o pago inoportuno de las obligaciones a cargo de sus reaseguradores, asegurados, intermediarios de seguros y otras compañías de seguros con las cuales realiza operaciones de coaseguro. Incluye la exposición al riesgo de crédito indirecto, el cual se genera, por ejemplo, en la expedición de pólizas de cumplimiento.
- **Riesgo de mercado.** Se entiende por riesgo de mercado la posibilidad de incurrir en pérdidas derivadas del incremento no esperado en el monto de sus obligaciones con asegurados, reaseguradores, intermediarios y otros agentes externos a causa de variaciones en las tasas de interés, en la tasa de devaluación o cualquier otro parámetro de referencia.
- **Riesgo de liquidez.** Se entiende por riesgo de liquidez la imposibilidad de adquirir u obtener los fondos necesarios para atender el pago de obligaciones de corto plazo bien sea para el pago de siniestros o para el ajuste de reservas inadecuadamente calculadas.
- **Riesgo de suscripción.** Se entiende por riesgo de suscripción la posibilidad de incurrir en pérdidas como consecuencia de políticas y prácticas inadecuadas en el diseño de productos o en la colocación de los mismos. Dicha categoría de riesgo se puede clasificar en los siguientes tipos:
 - **Riesgo de tarificación.** Corresponde a la probabilidad de pérdida como consecuencia de errores en el cálculo de primas al punto que resulten insuficientes para cubrir los siniestros actuales y futuros, los gastos administrativos y la rentabilidad esperada.
 - **Riesgo de descuentos sobre primas.** Corresponde a la probabilidad de pérdida en que puede incurrir una entidad como consecuencia del otorgamiento inadecuado de descuentos sobre primas.

- *Riesgo de concentración.* Corresponde a la probabilidad de pérdida en que puede incurrir una entidad como consecuencia de una inadecuada diversificación de los riesgos asumidos.
- *Riesgos de diferencias en condiciones.* Corresponde a la probabilidad de pérdida que se genera como consecuencia de diferencias entre las condiciones originalmente aceptadas de los tomadores de pólizas y las aceptadas a su vez por los reaseguradores de la entidad
- **Riesgo de insuficiencia de reservas técnicas.** Corresponde a la probabilidad de pérdida como consecuencia de una subestimación en el cálculo de las reservas técnicas y otras obligaciones contractuales. (Participación de utilidades, pago de beneficios garantizados, etc.)
- **Riesgo legal.** Se entiende por riesgo legal en seguros la posibilidad de incurrir en pérdidas derivadas del incumplimiento de normas legales, la inobservancia de disposiciones reglamentarias, de códigos de conducta o normas éticas en cualquier jurisdicción en la cual opere la entidad aseguradora. Así mismo, el riesgo legal puede derivar de situaciones de orden legal que puedan afectar la titularidad de los activos o la efectiva recuperación de su valor.
- **Riesgo operacional en seguros.** Se entiende por riesgo operacional a la posibilidad de incurrir en pérdidas derivadas de problemas en el desarrollo de las funciones del negocio o sus procesos. La exposición a este riesgo puede resultar de una deficiencia o ruptura en los controles internos o procesos de control, fallas tecnológicas, errores humanos o deshonestidad y catástrofes naturales.
- **Riesgo estratégico.** Corresponde a la probabilidad de pérdida como consecuencia de la imposibilidad de implementar apropiadamente los planes de negocio, las estrategias, las decisiones de mercado, la asignación de recursos y su incapacidad para adaptarse a los cambios en el entorno de los negocios.
- **Riesgo reputacional.** Corresponde a la probabilidad de pérdida como consecuencia de incurrir en pérdidas derivadas de la celebración de contratos de seguros y reaseguros con personas y entidades que generen un bajo nivel de confianza para sus asegurados por su nivel de solvencia o la conducta de sus funcionarios o por la celebración de acuerdos sobre los cuales recaiga una publicidad negativa, así como la realización de prácticas que puedan derivar en demandas legales y pérdida de credibilidad del público.

2.3. ENTERPRISE RISK MANAGEMENT (ERM)

La administración de riesgos tal y como existe hoy en día, es distinta a la existente cuarenta años atrás ya que ha progresado desde sólo tener en cuenta los riesgos dentro de la compañía, hasta una aproximación que integra la administración de riesgos a los objetivos estratégicos de la compañía, para un recuento del tratamiento de los riesgos hasta llegar a **ERM**, se sugiere revisar Lee et al (2003). Dentro de los cambios más notables se encuentra el alcance de los riesgos considerados.

Anteriormente los riesgos eran manejados de una manera muy segregada, pero desde los comienzos de 1990 la noción de integrados o administración corporativa del riesgo, conocida como Enterprise Risk Management, **ERM**, comenzó a cobrar auge. Este nuevo marco de referencia para la administración de riesgos fortaleció a las compañías para que pasaran de una aproximación segregada o por “silos”, a una aproximación con una visión global y corporativa de la administración de riesgos.

En la vía de determinar una definición de **ERM** tenemos en cuenta las siguientes citas:

- Miccolis y Shah (2001), consultores de Tillinghast – Towers Perrin, definen “**ERM** es una aproximación rigurosa a la cuantificación y administración de todos los riesgos, provenientes de cualquier fuente, que amenacen el cumplimiento de los objetivos estratégicos de la organización. Adicionalmente, **ERM** se encarga de identificar aquellos riesgos que representen oportunidades para explotar una ventaja competitiva. Su objetivo es aumentar el valor de los propietarios (shareholders)”.
- El Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission – COSO () define **ERM** como “un proceso, ejecutado por las directivas de la entidad, la administración y otro personal, aplicado en la estrategia y a través de toda la empresa, diseñado para los eventos potenciales que podrían afectar la entidad, y administrar los riesgos para proporcionar garantías respecto al cumplimiento de los objetivos de la entidad”.
- La Casualty Actuarial Society – CAS (2003) afirma “**ERM** es una disciplina por medio de la cual una organización en cualquier industria valora, controla, explota, financia y monitorea los riesgos provenientes de

todas las fuentes con el propósito de aumentar el valor a corto y a largo plazo, de sus propietarios (shareholders)”.

*Las entidades privadas y públicas existen para crear valor a sus propietarios y todas enfrentan incertidumbre. El desafío de la administración es determinar el nivel de incertidumbre que la organización está preparada para aceptar en la medida en que se esfuerza para aumentar el valor de la riqueza entregada a sus propietarios. Ninguna organización funciona dentro de un ambiente en el que no existan riesgos, el objetivo de **ERM** es capacitar a la administración para funcionar de una manera más efectiva en esos ambientes llenos de riesgos que no se pueden cambiar.*

*Las razones para implementar **ERM** dentro de cualquier organización no son solo de tipo externo, como una respuesta a la presión directa e indirecta que ejerce el gobierno al implementar aspectos regulatorios orientados a proteger a los inversionistas y en general a la sociedad, sino que se derivan de aspectos de rentabilidad y estabilidad interna de las organizaciones. En el estudio, basado en encuestas, realizado por Tillinghast – Towers Perrin (2002), en los sectores de la industria de seguros, se observó que el 49% de los encuestados tenían establecido **ERM** dentro de su organización y otro 38% estaba considerando implementarlo. Por otro lado, el 90% de los encuestados que ya utilizan **ERM** respondieron que el hecho que los impulsó a implementarlo es que sencillamente “**ERM** es un buen negocio”.*

*El Casualty Actuarial Society Enterprise Risk Management Seminal (Ackerman 2001) establece los pasos que se deben seguir en la implementación de **ERM** como:*

- *Identificar las preguntas.*
- *Identificar los riesgos.*
- *Medir de los riesgos.*
- *Formular las estrategias para limitar los riesgos.*
- *Implementar estrategias.*
- *Monitorear los resultados.*

Y, volver a repetir...

Mientras que la firma consultora, ARI Risk Management Consultant (2001), los establece así:

- *Identificar los riesgos dentro de la compañía.*
- *Medirlos.*
- *Formular estrategias y tácticas para mitigarlos.*
- *Ejecutar esas estrategias y tácticas.*
- *Monitorear el proceso.*

*De acuerdo con Tillinghast – Towers Perrin (2001), la metodología que rige la puesta en práctica de un **ERM**, se puede resumir en el siguiente cuadro:*

DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER

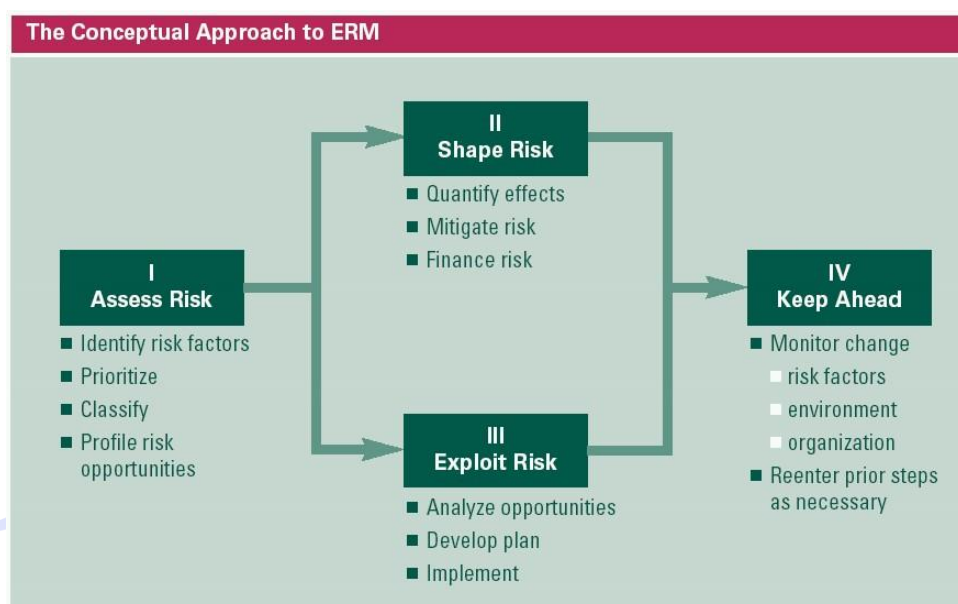


Fig. 2: Metodología de ERM

Fuente: Tillinghast – Towers Perrin, Jerry Miccolis, Samir Shah Monograph (2001)

Tomando los riesgos como una oportunidad de la cual se puede obtener una ventaja competitiva, una vez éstos se han valorado, se tiene que explotar el riesgo. La ventaja puede surgir por dos caminos: el primero se refiere a la naturaleza del riesgo como tal ya que ciertos riesgos debido a su predictibilidad y/o efectos en la compañía representan más un riesgo para la competencia, que para la propia organización; el segundo camino se refiere al entendimiento que la organización tiene del riesgo y a su capacidad para responder ante él. **ERM** no es un fin en sí mismo, sino un camino, por esto no puede actuar de manera aislada en la organización; de esta manera ayuda a la entidad a mejorar su desempeño y prevenir la pérdida de recursos.

En resumen, tomando los riesgos como una amenaza ante la cual hay que responder, se debe (Towers Perris 2001):

- **Valorar los riesgos.** La valoración de los riesgos implica verlos tanto como en una amenaza, como una oportunidad. En el primer caso, la valoración incluye la identificación, la priorización y la clasificación de los factores de riesgo para diseñar una respuesta defensiva. En el segundo caso, se incluye determinar el perfil para diseñar una respuesta ofensiva. Por lo anterior, para valorar los riesgos es necesario moldearlos de tal forma que dicho modelaje permita:
 - Observar el efecto portafolio, como por ejemplo que una correlación favorable entre riesgos tiende a compensarlos sin necesidad de que la organización realice inversiones.
 - Promover una adecuada distribución de las fuentes de capital a los riesgos que realmente importan.
 - Medir la inversión necesaria para remediar los riesgos.
 - Proporcionar un marco de referencia para monitorear los riesgos.

Es necesario distinguir entre riesgos y factores de riesgo. Riesgo, es la posibilidad de que algo pueda perjudicar el logro de los objetivos del negocio. Factores de riesgo, son eventos o condiciones que dan origen al riesgo. Por ejemplo, un riesgo es la pérdida de participación en el mercado y un factor de riesgo, es la falta de preparación ante la entrada de nuevos competidores. Los riesgos no son algo que pueda ser directamente manejado o controlado, sin embargo, los factores de riesgo, sí se pueden controlar. A continuación, describimos los pasos del proceso:

- **Identificar:** Se necesita identificar todos los factores de riesgo que puedan potencialmente afectar el logro de los objetivos de la organización. Dichos factores surgen de muchas fuentes, entre otras: financieras, operacionales, regulatorias, y tienen que ser materializables para considerarlos.

- **Priorizar:** Hasta este momento se debe conocer de cada factor de riesgo su: probabilidad, frecuencia, predictibilidad y efecto potencial en los indicadores claves de desempeño de la organización. Los atributos de cada factor se combinan para tener un puntaje total, y una vez obtenido este puntaje, se produce una lista de priorización. De esta clase de puntaje, los factores de riesgos que quedan clasificados son aquellos que pueden influir en el plan estratégico, alterar las prioridades día a día y afectar el comportamiento de la organización.
- **Clasificar:** Los factores de riesgo de alta prioridad son de dos tipos: los caracterizados porque el ambiente en el que surgen es familiar a la organización y las habilidades necesarias para remediarlos también se encuentran dentro de la organización. Estos son llamados “factores de riesgo gerenciables” (manageable risk factors), y los otros que surgen en terrenos no familiares a la organización en donde ésta no cuenta con las habilidades necesarias para responder, son denominados “factores de riesgo estratégicos” (strategic risk factors).
- **Darle forma al riesgo.** La aproximación a darle forma a los riesgos tiene su base en los métodos de Investigación de Operaciones tales como la probabilidad aplicada y la estadística, la simulación estocástica y la optimización del portafolio de activos y de pasivos. Los pasos por seguir son:
 - **Modelar los factores de riesgo individualmente.** Modelar las diferentes fuentes de riesgo implica:
 - Generar distribuciones de probabilidad, debido a que cada factor de riesgo presenta incertidumbre en cuanto a cómo, cuándo y en qué grado se manifestará el factor de riesgo. Para esto se utilizan métodos basados en información histórica, testimonio de expertos o simulación estocástica.
 - Determinar la correlación entre las fuentes de riesgo, ya que uno de los beneficios de manejar los riesgos a nivel global es tomar ventaja de las barreras naturales y reflejar la correlación entre los riesgos. Para esto es necesario armar una matriz de coeficientes de correlación entre parejas de riesgos.
 - **Unir los factores de riesgo a través de medidas financieras comunes.** Para esto es necesario:
 - Seleccionar métricas financieras que permitan que los riesgos se combinen y unan en una sola medida financiera que varía dependiendo de los objetivos y metas de la organización.
 - Desarrollar un modelo financiero que una los factores de riesgo en una medida financiera, para que una vez seleccionada la medida financiera se pueda modelar el impacto agregado de las fuentes de riesgo sobre ésta, por ejemplo, un flujo de caja.
 - Medir el nivel actual de los riesgos de la organización antes de la implementación de las estrategias de mitigación.
 - **Armar un portafolio de estrategias** para la mitigación de riesgos de tal forma de definir una línea de acción para mitigar dicho nivel. Para ello se necesita:
 - Identificar las estrategias de remediación de riesgos: y calcular su costo y su beneficio.
 - Modelar los efectos de cada estrategia en la métrica financiera seleccionada anteriormente: cada estrategia intenta darle forma al riesgo ajustándolo a las preferencias de la administración. Darle forma al riesgo significa poder alterar la forma de su distribución de probabilidad y por lo menos existen tres formas de lograrlo:
 - Modificar el primer momento de la distribución, por ejemplo, aumentar su valor esperado.
 - Modificar el segundo momento, por ejemplo, disminuir las desviaciones de los valores esperados.
 - Reducir la cola de la distribución en el lado inferior de los ingresos, por ejemplo, controlar el peor escenario.
 - **Optimizar la inversión a través de las estrategias de mitigación** de forma tal de determinar la distribución adecuada del portafolio de inversiones, para esto, se debe formular la decisión como un problema de optimización, lo que implica:
 - Identificar los objetivos de la optimización, es decir, la función objetivo
 - Identificar las restricciones de optimización las cuales reducen el rango de respuestas y garantizan una decisión implementable en la realidad.
 - Desarrollar una frontera eficiente de las estrategias de remediación lo cual se logra corriendo varias veces el modelo de optimización con dicha finalidad.

- **Administrar el riesgo** teniendo en cuenta que el ambiente dinámico del riesgo cambia constantemente, por lo tanto, controlarlo continuamente es importante; dependiendo de la naturaleza y grado de los cambios inevitables, se tienen que revisar ciertos pasos del proceso.

Con respecto a los beneficios, The Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission (COSO) considera que la implementación de **ERM** dentro de una organización, son:

- **Alinear el apetito de riesgo y la estrategia:** el apetito de riesgo es el grado de riesgo que la compañía acepta en la consecución de sus objetivos. Con **ERM** la administración puede, primero, considerar el apetito de riesgo al evaluar las alternativas de estrategias que tenga, luego, definir los objetivos de acuerdo con la estrategia seleccionada y, por último, desarrollar mecanismos para administrar los riesgos relacionados.
- **Unir el crecimiento, el riesgo y el retorno:** las entidades aceptan el riesgo como parte de la creación de valor y por ello esperan un retorno proporcionado. **ERM** proporciona una gran habilidad para identificar y valorar los riesgos, y establecer los niveles aceptables de riesgo en relación con los objetivos de crecimiento y retorno.
- **Fortalecer las decisiones en respuesta a los riesgos:** a través de **ERM** la entidad adquiere la fortaleza de identificar y seleccionar entre las distintas posibles respuestas a los riesgos, evitarlos, reducirlos, dividirlos y aceptarlos. **ERM** proporciona metodologías y técnicas para tomar esas decisiones.
- **Minimizar las pérdidas operacionales:** la entidad se fortalece en la capacidad de identificar eventos potenciales, valorar los riesgos, establecer respuestas, reduciendo de esta manera la ocurrencia de sorpresas y las pérdidas y los costos relacionados.
- **Comprender oportunidades:** la administración considera los eventos potenciales, en lugar de solo riesgos, y al considerar un amplio rango de eventos gana el entendimiento de cómo ciertos eventos pueden representar oportunidades.
- **Racionalizar el capital:** al tener información robusta de todos los riesgos, la administración puede valorar efectivamente, las necesidades de capital mejorando a su distribución del capital.

Martens y Nottingham definen los componentes de **ERM** como se describe a continuación:

- **Ambiente interno:** Este ambiente influye en cómo se definen las estrategias y las metas, cómo se estructuran las actividades y cómo se identifican y valoran los riesgos. El ambiente interno posee muchos elementos: valores éticos, personal, estilo de administración y la filosofía y cultura de la administración de riesgos.
- **Definición de objetivos:** **ERM** ofrece a la administración de la organización un proceso para la fijación de los objetivos asegurándose que dichos objetivos se encuentren alineados con las metas estratégicas, y que esas metas sean consistentes con el apetito de riesgo.
- **Identificación de eventos:** Ninguna organización puede saber con exactitud cuáles eventos ocurrirán y cuáles serán sus resultados. A través del proceso de identificación de eventos, la administración considera los factores, tanto internos, como externos, que podrían afectar su estrategia y el logro de sus objetivos.
- **Valoración del riesgo.** Este proceso se enfoca tanto en la probabilidad y el impacto de eventos potenciales, como en su efecto sobre los objetivos. La valoración de riesgos emplea métodos tanto cuantitativos, como, cualitativos
- **Respuesta a los riesgos.** Una vez los riesgos se han identificado y categorizado, la administración evalúa las posibles respuestas y sus efectos. Para una administración adecuada del riesgo, los administradores deben seleccionar una respuesta al riesgo que este dentro de los parámetros de la tolerancia al riesgo. Las respuestas a los riesgos son de cuatro categorías: evitarlos, cambiarlos, reducirlos y aceptarlos.
- **Actividades de control:** Todas estas políticas y procedimiento aseguran que las respuestas a los riesgos se lleven a cabo de manera eficiente. Las actividades de control reflejan el ambiente y la industria en la cual opera la compañía, así como su estructura interna, historia y cultura.
- **Información y comunicación:** La información se necesita en todos los niveles de la organización para identificar, valorar y responder a los riesgos. La información pertinente, tanto de fuentes internas como externas, debe ser capturada de tal forma que permita al personal de la organización, reaccionar rápida y eficientemente. Una comunicación eficiente incluye el intercambio de datos relevantes con agentes externos tales como clientes, agentes reguladores y shareholders.

2.4. ASSETS LIABILITIES MANAGEMENT – ALM

La Gestión de Activos y Pasivos (GAP), en inglés, *Assets Liabilities Management (ALM)*, ha evolucionado desde poco antes de los inicios de la década de los ochenta y es en 1984, con el trabajo de Rene Stulz (1984) que la literatura financiera recibe la primera teoría acerca de **ALM** y la amplia área que cubre la administración de riesgos financieros.

ALM ha recibido tantas definiciones como significados tiene para diferentes personas. Para un administrador, **ALM** es simplemente un protocolo de negocios; es un sistema donde las inversiones y los pasivos se manejan de forma tal, que ayuden a la organización a cumplir con sus objetivos de solvencia. Para un estadístico, **ALM** significa técnicas estocásticas complejas que incluyen variables aleatorias y simulaciones computacionales convirtiéndose en un área altamente interesante de investigación. Pero, aunque existan diferentes definiciones de **ALM**, hay un aspecto que prevalece en todas: la noción de analizar simultáneamente los activos y los pasivos, y la relación que existe entre ellos de forma tal que los riesgos asociados no se traten de manera separada o independiente.

Ahora bien, **ALM** se puede definir como el conjunto de técnicas utilizadas para analizar la relación existente entre los activos y los pasivos de la compañía, en aras de ayudarlas a mitigar los riesgos del negocio. Por otro lado, **ALM** se define como la administración de activos y de pasivos soportada en técnicas de optimización estocástica con la finalidad de obtener un retorno adecuado mientras se logra mantener un adecuado “surplus” de los activos más allá de los pasivos. **ALM** permite alinear los riesgos del ambiente que se reflejan en el balance y el estado de pérdidas y ganancias, tanto del lado de los activos, como de los pasivos. En **ALM**, todos los riesgos de una organización se correlacionan entre sí, de manera tal que la exposición total al riesgo que enfrenta la organización no se ve reducida, como ocurre cuando se ignora las estructuras de correlación de los riesgos. Esto se logra al estructurar procesos de generación sintética de escenarios probabilísticos que son tenidos en cuenta en los procedimientos algorítmicos propios de la optimización estocástica multi-etapa (Velásquez 2005).

Para representar los procesos en los modelos **ALM** se tienen dos tipos de variables: inventarios y flujos financieros. Las variables de inventario, o de balance, son análogas a las cuentas de balance contable, y representan el estado de la cuenta después de las transacciones en un período, por su parte las variables de flujo son análogas a las cuentas de ingresos y egresos, y representan flujos netos ocurridos entre dos fechas, el comienzo y el fin de un período del horizonte de planificación. Se consideran tres tipos de ecuaciones básicas para el modelaje de planificación de cuentas financieras:

- Balance de activos
- Balance de pasivos
- Flujo de caja.

A las anteriores restricciones se adicionan ecuaciones para modelar diferentes aspectos del proceso de toma de decisiones como:

- Reglamentación
- Límites en Inversión
- Formas de Negociación
- Formas de los Instrumentos financieros
- Benchmarks
- Valor en Libros versus Valor en Mercado

Tomando como referencia Zenios y Rosen (2002) un sistema **ALM** se puede representar como se muestra en la siguiente figura:

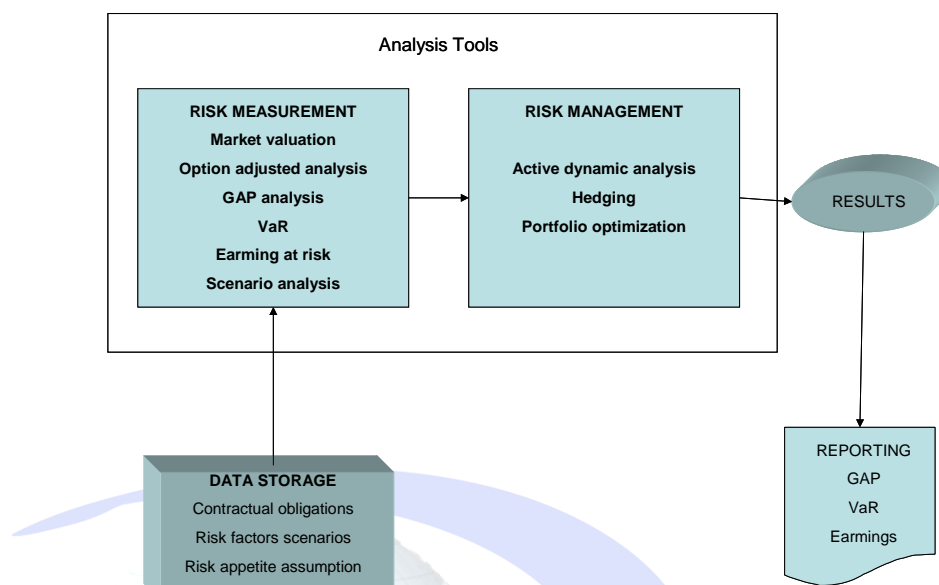


Fig. 3: Componentes ALM
Fuente: Zenios y Rosen (2002)

Las metas del sistema se dirigen a desempeñar tareas tales como: simulación de balances y estados de pérdidas y ganancias, análisis de sensibilidad, evaluación actual y futura, y modelaje dinámico de los estados financieros. Estas funciones proveen los datos necesarios para que la administración pueda alinear el lado de activos del balance con la distribución de pasivos y de capital; dicha alineación se alcanza una vez la posición de riesgo se ha controlado.

El análisis de la figura permite notar que los componentes básicos de **ALM** son:

- Almacenamiento de datos, el cual provee información del mercado tal como precios y probabilidades de cambio en los factores de riesgo, suposiciones de comportamiento referentes al apetito de riesgo, e información acerca de nuevos negocios.
- Herramientas de análisis, las cuales brindan el soporte analítico tanto para la medición, como para la administración del riesgo, son utilizadas para la cuantificación de las fuentes de riesgo y facilitan el uso de modelos de optimización del portafolio para neutralizar dichos riesgos. Por lo general el análisis toma la forma de pronósticos o simulaciones de las tasas de interés y de los “spreads”. Las proyecciones estimadas se convierten en escenarios sintéticos que son utilizados para simular los balances y repreciar (“repricing”) los activos y pasivos bajo las diferentes condiciones del entorno aleatorio.
- Reportes, los cuales le proporcionan a los accionistas y a las entidades reguladoras, información relacionada con el valor en riesgo y las ganancias esperadas bajo determinados patrones de toma de decisiones.

Zenios (2002) afirma que “la administración de los estados financieros de las empresas está en el corazón de **ERM** para lo que **ALM** proporciona instrumentos fundamentales en la administración y la medición de riesgos, los cuales son aplicables a **ERM**”. Es claro que, para las instituciones financieras, la administración de los balances de una organización es parte fundamental de **ERM** ya que ellos reflejan el riesgo del ambiente, por el lado de los activos, y la mayoría de los riesgos del negocio, por el lado de los pasivos. Alinear estos riesgos es la meta fundamental de un sistema **ALM**, así que, éste absorbe parte de los problemas de **ERM**. En la actualidad, las herramientas para **ALM** están mejor desarrolladas que para **ERM** y además **ALM** tiene una visión más enfocada de los riesgos que **ERM**. **ALM** se centra, en el lado de los activos, en los riesgos de mercado, de crédito y de liquidez, y por el lado de los pasivos, en las volatilidades de los márgenes y de los costos”.

Por lo anterior se puede justificar claramente el uso de **ALM** como herramienta fundamental de **ERM**. Existen múltiples ejemplos de aplicaciones exitosas de este tipo de enfoque para el manejo corporativo de riesgos financieros. A continuación, se describen brevemente algunas de ellas (Velásquez 2002).

- **Yasuda Fire and Marine Insurance Co.** es una compañía de seguros japonesa creada en 1888 que en 1991 contaba con 685 oficinas en Japón y 22 oficinas en el resto del mundo y manejaba un total de activos de 26.2 billones de dólares americanos (USD); era la segunda compañía japonesa de seguros y la quinta a nivel mundial. En 1988 contrató a la compañía australiana Frank Russell Co. para que le diseñará e implementará un modelo de planificación financiera que entró en operación en abril de 1991. El modelo de optimización estocástica determina la estrategia óptima de inversiones a lo largo de múltiples períodos de planificación y define las posiciones de riesgo de una forma tangible en términos operacionales, basados en los estados financieros proyectados de la organización. El valor agregado por el sistema asciende a USD 79'000.000 en los primeros dos años de operación (1991-1992). (Cariño and Ziemba 1998, Cariño et. al. 1994).
- **Towers Perrins**, una conocida compañía global que provee servicios de consultoría actuarial y de manejo de riesgos con más de 8000 empleados en 23 países, utiliza un sistema integrado de planificación de activos y pasivos para la toma de decisiones de la administración de pensiones, este sistema se denomina CAPS:Link (Capital Market Linkages). El modelo de optimización estocástica de CAPS:Link depende de un modelo económico de ecuaciones diferenciales estocásticas para la generación de escenarios proyectados para los factores económicos y para la rentabilidad de los activos. Los escenarios cubren períodos de planificación de 10 a 40 años. El modelo de optimización estocástica determina dinámicamente la distribución de activos y de pasivos sobre todos los escenarios analizados. Basado en CAPS:Link se presta asesoría a compañías clientes con base en análisis de inversión personalizados que le permiten medir los riesgos de diferentes planes de pensión desde múltiples puntos de vista. Este enfoque ha sido implementado en 12 países en Europa, Asia y América del Norte (J. M. Mulvey 1996).
- **Federal National Mortgage Association (Fannie Mae)** es una empresa creada, patrocinada y regulada por el estado americano que provee productos y servicios financieros para ciudadanos americanos de medianos y pequeños ingresos. Dos son las líneas principales de negocios: garantías de negocios (mortgage guaranty bussines) y garantías de inversiones (mortgage investment bussines). Al final de 1990 el portafolio de garantías de inversión había cumplido más de 50 años de operación y sumaba más de USD 17 billones, en tanto que el portafolio de garantías de negocios cumplía 10 años de operación y sumaba USD 300 billones. Fannie Mae utiliza el Asset-Liability Management Strategy System (ALMS) para apoyar la toma de decisiones con respecto al manejo de un "highly leverage portfolio of home mortgage assets". El ALMS emplea una combinación de modelos de simulación Monte Carlo del flujo de caja y de modelos de valoración de opciones (pricing options) para estimar la función de distribución de probabilidad del período de retorno para cada activo y para cada obligación considerada en el modelo de optimización del portafolio que maximiza la utilidad de los propietarios (M. R. Holmer 1994).
- **Pacific Financial Asset Management Company**, una "gran" compañía californiana de inversiones, utiliza el sistema SMART (Surplus Management and Risk Technology), basado en un modelo no lineal de optimización estocástica, para la distribución del portafolio de activos financieros que respaldan los planes de pensiones. El factor crítico del modelaje es balancear los riesgos y las posibles ganancias de las decisiones estratégicas relacionadas con los movimientos de pasivos proyectados. Este enfoque ha permitido un manejo del riesgo en una forma más comprensiva y realista. El modelo de optimización extiende la teoría mean-variance de Markowitz para manejar activos y pasivos de tal forma de preservar la riqueza de la organización definida como el valor de mercado de los activos menos el valor presente de los pasivos. El sistema se ha implementado en computadores personales dándole gran capacidad de cubrimiento dentro de la organización, permitiendo asesorar a inversionistas institucionales en cómo repartir su inversión entre los diferentes tipos de activos: acciones, inventarios, bonos, propiedad raíz, derivados y otros. (J. M. Mulvey 1994).

Las aplicaciones **ALM** no se restringen a las organizaciones del sector financiero, hoy en día se incluyen dentro del denominado sistema **EPO** "Enterprise Profit Optimization" orientados al soporte de las organizaciones que manejan cadenas de abastecimiento industriales.

3. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA

Los conceptos de optimización estocástica aplicados al control del riesgo financiero son la metodología fundamental que soporta la capacidad analítica de **ALM**. A continuación, se presentan aspectos teóricos fundamentales de dicha metodología. El texto que a continuación, se presenta se ha tomado de Velásquez (2005).

Un problema de optimización se denomina como de programación estocástica (Stochastic Programming, **SP**) cuando se debe enfrentar la problemática que se deriva de la incertidumbre inherente a las variables y a los parámetros involucrados en el modelo. La incertidumbre relacionada con las variables está asociada a la certeza que se tiene de la implementación de las decisiones en la realidad tal y como se deciden, incertidumbre asociada a la precisión de las acciones de control sobre el sistema, este caso no se trata en el presente trabajo. El segundo caso se refiere a la incertidumbre en los datos de entrada a los modelos, (por ejemplo, los costos, los precios, las demandas, las disponibilidades) unida a la evolución de los datos con el tiempo. Este es el caso de interés en este estudio.

El problema **SP** típicamente se ha planteado bajo una de dos formas: i) modelos de programación dinámica estocástica (Stochastic Dynamic Programming, **SDP**), por ejemplo, los procesos de decisión markovianos, o ii) modelos de programación matemática multi-etapa (Multi-State Stochastic Programming, **MS-SP**). La metodología vigente para desarrollar aplicaciones de gran tamaño es la **MS-SP** ya que proporciona una base de modelaje apropiada que es viable de manejar computacionalmente, sin que ello implique que no existen limitaciones que exijan la permanente investigación para resolver problemas que representen fehacientemente sistemas cada vez más complejos y de mayor dimensionalidad.

El problema de optimización estocástica tiene muchas facetas. Una de ellas es la redefinición del concepto de optimalidad; a diferencia de la optimización determinística, para la cual se puede establecer una solución como la óptima, en la optimización estocástica se debe incorporar el riesgo y las posiciones de los decisores frente al riesgo para determinar cuándo una decisión es mejor que otra. Por su esencia la optimización bajo incertidumbre implica un problema multi-criterio, ya que se deben enfrentar objetivos que mueven en diferentes direcciones; por un lado, se desea maximizar/minimizar el valor esperado de la función de utilidad, y por otro lado se desea minimizar el riesgo asumido. Esto no implica que el proceso de optimización se vuelva subjetivo, sino que es necesario establecer explícitamente conceptos de administración de riesgos que muchas veces se manejan de manera subjetiva. Una vez se ponen en evidencia estos conceptos, los principios matemáticos de la optimización estocástica son tan explícitos y tan exactos como los de la optimización determinística.

Uno de los requisitos previos para resolver modelo **MS-SP** es la discretización del proceso estocástico que representa la evolución de las variables aleatorias que en la mayoría de los casos son continuas. La **MS-SP** implica una solución numérica con base en un número finito de posibles realizaciones estocásticas; cada posible realización del proceso discreto se asocia a un escenario que se representa por medio de un árbol de posibles transiciones de las variables aleatorias y normalmente es el resultado de una discretización un proceso continuo o de una agregación de un proceso discreto. Existen dos alternativas básicas para modelar el proceso estocástico y relacionarlo con el modelaje de optimización:

- Modelaje del proceso estocástico embebido en el modelo de optimización.
- Modelaje del proceso estocástico exógenamente al modelo de optimización

En el presente estudio se asumen escenarios generados exógenamente al modelo de optimización en un proceso previo independiente.

La relación entre modelo del proceso estocástico y el de optimización se realiza por medio de la matriz de relaciones funcionales, de los vectores de costos y/o de los vectores de recursos, los cuales se asume son resultado de la realización del proceso estocástico. En el modelo de optimización los aspectos probabilísticos se representan a través de un espacio muestral finito, pero de gran dimensionalidad que permite aproximar de manera discreta, la realidad continua del universo del proceso estocástico.

Otro aspecto es el relacionado con la caracterización de las variables. Existen al menos dos tipos de variables: las asociadas directamente con la decisión "real" que se va a tomar con el apoyo del modelo, y las de operación simulada condicionada en las posibles realizaciones del proceso estocástico en el futuro.

Numerosas aplicaciones a problemas reales como aplicaciones militares (Morton et. al. 2002), transporte (Powell et al. 1995), planificación de la producción y de cadenas de abastecimiento (Escudero et al. 1993), planificación financiera (Mulvey y Vladimirov 1992, Zenios 1993, Ahn et. al. 1994, Cariño et. al. 1994, 1998), mercados eléctricos (Birge 1997, Birge y Mulvey 1996, Velásquez 2001), y muchas otras áreas, pueden formularse como problemas de optimización estocástica.

Debido al carácter propio de los sistemas, se encuentran problemas de optimización estocástica de múltiples formatos: lineales, cuadráticos, no-lineales, entero mixtos, ...

La formulación de los problemas de SP está directamente relacionada con las suposiciones sobre el proceso de toma de decisiones que representan, el cual determina la estructura de los problemas matemáticos a resolver.

Se pueden considerar dos casos:

- Estáticos: procesos de decisión de una sola etapa en los que una vez se toma la decisión se espera la ocurrencia del proceso estocástico para evaluar el impacto de la decisión y finalizar el proceso decisorio;
- Dinámicos: procesos de decisión de más de una etapa a lo largo del tiempo, en los que se toma decisión al comienzo de un período y se espera la ocurrencia del proceso estocástico durante el período para evaluar su impacto y tomar una nueva decisión al comienzo del siguiente período, hasta cubrir el horizonte de planificación.

El interés de ALM se concentra en problemas dinámicos, pero inicialmente para introducir los conceptos se considera un problema estocástico estático.

3.1. PROBLEMAS ESTÁTICOS

Consideremos el caso en que w representa al vector de las variables asociadas al entorno aleatorio y x al vector de decisiones. Desde el punto de vista del decisor se enfrentan dos problemas: i) la selección de los valores "óptimos" de x ; y ii) la caracterización probabilística del vector w , que se manifiesta por medio de $\phi(w)$ que representa a la función de distribución multivariada de probabilidad (fdp) de w . Las decisiones óptimas x^* son función de $\phi(w)$, y por lo tanto la mala caracterización de $\phi(w)$ implica malas decisiones. Adicionalmente, se considera la función $f(x|w)$ como una medida de rendimiento de las decisiones, la cual normalmente se asocia al costo, o a la utilidad, de la decisión x dado que ocurre el escenario w .

Consideremos el vector x , que representa las decisiones, con componentes x_i

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Gamma$$

donde x_i representa la decisión i y Γ el espacio factible para x , el cual se asume independiente de w .

Para caracterizar probabilísticamente w se debe definir su espacio muestral W y su función de distribución de probabilidad $\phi(w)$. Para el caso de w perteneciente a un espacio continuo, el valor esperado del rendimiento es igual a

$$E(x) = \int_{w \in W} f(x|w) \phi(w) \partial w$$

Para el caso de w perteneciente a un espacio discreto, o que, por conveniencia o necesidad, se asuma discreto, w puede caracterizarse por medio de

$$\mathbf{w} \in \mathbf{W} = \{ w_1, w_2, \dots, w_H \}$$

$$\Theta = \{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_H \}$$

donde w_h representa la realización del vector \mathbf{w} si ocurre la condición h , θ_h la probabilidad de que ocurra dicha condición y H la cantidad de posibilidades aleatorias o escenarios. El valor esperado del rendimiento es igual a

$$E(x) = \sum_{h=1,H} f(x|w_h) \theta_h$$

Como ejemplo de referencia consideremos la definición de las proporciones de inversión en un portafolio con n instrumentos financieros, donde x_i representa la fracción de inversión realizada en el instrumento i . En este caso Γ está definido como

$$\Gamma = \{ \sum_{i=1,N} x_i = 1, \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i=1,N \}$$

y la función $f(x|w)$ corresponde a

$$f(x|w) = \sum_{i=1,N} r_i(w) x_i$$

donde $r_i(w)$ representa el rendimiento del instrumento i si ocurre el escenario w . El valor esperado del rendimiento se puede expresar como

$$E(x) = \sum_{i=1,N} [\int_{w \in W} r_i(w) \phi(w) \partial w] x_i$$

El enfoque más simple para determinar x es minimizar su costo esperado, esto implica

$$VE: = \{ \text{Min} \sum_{i=1,N} [\int_{w \in W} r_i(w) \phi(w) \partial w] x_i \mid x \in \Gamma \}$$

En general si el espacio muestral de w se asume discreto y la función $f(x|w)$ es lineal con respecto a x y separable con respecto a w , $f(x|w)$ se puede escribir como

$$f(x|w_h) = \sum_{i=1,N} c_{i,h} x_i$$

donde $c_{i,h}$ representa el rendimiento o costo de la variable i si ocurre la condición aleatoria w_h . El valor esperado del rendimiento se puede expresar como

$$E(x) = \sum_{h=1,H} \theta_h \sum_{i=1,N} c_{i,h} x_i$$

Para determinar la composición del portafolio minimizando su costo esperado implica

$$VE: = \{ \text{Min} \sum_{h=1,H} [\sum_{i=1,N} \theta_h c_{i,h}] x_i \mid x \in \Gamma \}$$

3.2. MEDIDAS DE RENDIMIENTO DEL PROCESO ANALÍTICO: EVPI y VSS

Para establecer los beneficios esperados derivados del uso de los modelos de optimización estocástica es conveniente establecer tres problemas de referencia y a partir de ellos definir indicadores de rendimiento de las metodologías, los que dependerán de las características probabilísticas de cada problema. Los problemas de referencia son:

- **EV:** El problema determinístico del valor esperado (expected value problem)
- **PI:** El problema bajo información perfecta (wait and see problem)
- **SO:** El problema de optimización estocástica

3.2.1. EL PROBLEMA DETERMINÍSTICO DEL VALOR ESPERADO

El problema determinístico del valor esperado (deterministic expected value problem), **EV**;, se construye reemplazando los parámetros aleatorios por sus valores esperados. El problema **EV**: se formula matemáticamente como:

$$EV: = \{ F_{EV} = \text{Min } f(x | w^E) | x \in \Gamma \}$$

donde w^E representa el valor esperado del entorno aleatorio, o sea

$$w^E = \int_{w \in W} w \phi(w) \partial w$$

El modelo **EV**: corresponde a un problema determinístico de optimización que es utilizado frecuentemente con el fin de ganar conocimiento sobre el problema de decisión y en muchos casos es el medio utilizado para resolver el problema ante la ausencia modelos de optimización estocástica.

Sea x_{EV}^* la solución óptima a **EV**: y F_{EV} el valor de la función objetivo. Esta solución puede evaluarse para todos los posibles escenarios para determinar el costo que se daría para cada escenario y evaluar “el valor esperado de la solución del valor esperado” (expectation of the expected value solution), F_{EEV} que se define como

$$F_{EEV} = \int_{w \in W} f(x_{EV}^* | w) \phi(w) \partial w$$

Para el problema de referencia, se ha establecido que la zona de factibilidad Γ es independiente de w , y por lo tanto $f(x_{EV}^* | w)$ siempre tiene un valor definido. Sin embargo, esta condición de factibilidad no se cumple para casos de modelos dinámicos que se analizarán posteriormente, en dichos casos $f(x_{EV}^* | w)$ estaría indefinida para determinados valores de w y el valor de F_{EEV} sería infinito.

3.2.2. EL PROBLEMA BAJO INFORMACIÓN PERFECTA

El problema bajo información perfecta (wait and see problem), **IP**;, asume que el decisor puede esperar hasta que la incertidumbre sea resuelta antes de tomar la decisión, por lo tanto este enfoque implica que se cuenta con la información perfecta sobre el futuro. Debido a sus hipótesis semejante solución no puede obtenerse y la misma se convierte en una cota prácticamente inalcanzable. Este tipo de modelos es utilizado para analizar probabilísticamente la frontera para el valor de la función objetivo, y consiste en una familia de modelos de optimización, cada uno de ellos asociado a una condición aleatoria, que se formulan como:

$$PI(w): = \{ f^{MIN}(w) = \text{Min } f(x|w) | x \in \Gamma \}$$

Sea $x_{PI(w)}^*$ la solución óptima a **PI**(w);, esta solución puede evaluarse para todos los posibles escenarios para determinar el costo que se daría para cada escenario y evaluar lo que se llama “el valor esperado de la solución con información perfecta” (expectation of perfect information solution), F_{PI} que se define como:

$$F_{PI} = \int_{w \in W} f(x_{PI(w)}^* | w) \phi(w) \partial w$$

F_{PI} establece una cota límite para el valor esperado que solo se podría obtener si se tuviese conocimiento previo del futuro.

3.2.3. SP: EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA

El problema de optimización estocástica, **SP**;, corresponde a la metodología que se sugiere para determinar la decisión que se considera como “óptima”, la cual depende del criterio que se escoja para medir la bondad de dicha decisión. En caso de seleccionar el criterio del valor esperado, el problema **SP**: se formula como

$$SP: = \{ \text{Min} \int_{w \in W} f(x|w) \phi(w) \partial w \mid x \in \Gamma \}$$

Sea x_{SP}^* la solución óptima a SP ; esta solución minimiza el valor esperado y el valor de la función objetivo determina “el valor esperado de la solución de optimización estocástica” (expectation of stochastic optimization), F_{SP} que se define como:

$$F_{SP} = \int_{w \in W} f(x_{SP}^*/w) \phi(w) \partial w$$

3.2.4. EVPI y VSS

Los tres valores esperados de la función objetivo para las soluciones de los modelos de referencia, F_{EEV} , F_{PI} y F_{SP} sirven para establecer indicadores respecto al beneficio de las metodologías matemáticas en los procesos de optimización bajo incertidumbre (Valente et. al. 2001).

De acuerdo con la definición de los problemas se cumplen las siguientes desigualdades

$$F_{PI} \leq F_{SP} \leq F_{EEV}$$

La relación $F_{SP} \leq F_{EEV}$ se cumple debido a que minimiza el valor esperado de la función objetivo y por lo tanto no existe otro valor que pueda producir un menor valor para el valor esperado, o sea que se cumple

$$F_{SP} = \int_{w \in W} f(x_{SP}^*/w) \phi(w) \partial w \leq \int_{w \in W} f(x_{EEV}^*/w) \phi(w) \partial w = F_{EEV}$$

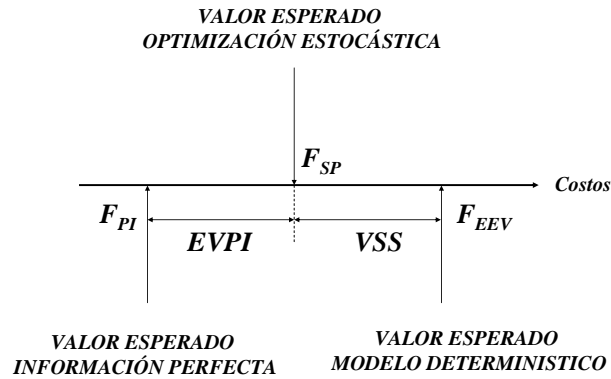
La diferencia entre F_{SP} y F_{EEV} determina el valor esperado de la ganancia que se obtiene debido a la utilización una metodología “sofisticada” (computacionalmente costosa) como optimización estocástica al compararla con una metodología más simple como la que representa el problema determinístico basado en el valor esperado de los parámetros del modelo. Esta diferencia se conoce como el valor de la solución estocástica, VSS (value of the stochastic solution), y se define como

$$VSS = F_{EEV} - F_{SP}$$

Otro índice importante se representa por el valor esperado de la información perfecta, $EVPI$ (expected value of perfect information), que se define como:

$$EVPI = F_{SP} - F_{PI}$$

$EVPI$ indica como el valor esperado de la cantidad el decisor puede pagar para obtener la información perfecta (es decir conocimiento) sobre los escenarios futuros. Un valor de $EVPI$ relativamente pequeño indica que mejores predicciones no implican necesariamente ganancias significativas.



Birge y Louveaux (1997) presentan dos límites prácticos que cumplen las anteriores medidas:

$$0 \leq EVPI \leq F_{SP} - F_{EV} \leq F_{EEV} - F_{EV}$$

$$0 \leq VSS \leq F_{EEV} - F_{EV}$$

las anteriores expresiones permiten estimar con solo resolver el problema determinístico del valor esperado, **EV**;, y evaluar el costo asociado para cada escenario las ganancias que se obtendrían por mejorar las tecnologías de optimización (**VSS**) y por mejorar las tecnologías de procesos estocásticos (**EVPI**).

DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER

3.3. MEDICIÓN DEL RIESGO

El riesgo es inherente a todas las decisiones bajo incertidumbre y por lo mismo su medida debe tenerse como referencia de la “solidez” de las decisiones que se toman. Existen varias medidas del riesgo asociado a una decisión, entre ellas se pueden enumerar:

- La varianza de la medida de rendimiento
- El valor en riesgo (Value-at-Risk, **VaR**)
- El exceso de pérdida esperado, o valor en riesgo condicionado (**CVaR**)

3.3.1. VALUE-AT-RISK (VaR)

En la actualidad, la medida de riesgo más conocida es el denominado **Value-at-Risk, VaR**, cuya definición inicial corresponde al límite superior de un intervalo de confianza para las pérdidas asociadas a un portafolio de inversiones a un determinado nivel de probabilidad. Este concepto no es nuevo, ya que fue tratado por Edgeworth en 1888, pero los desarrollos prácticos modernos datan de 1994 cuando la firma J.P. Morgan lanzó su producto RiskMetrics™, fecha a partir de la cual su uso se ha convertido en un estándar de la ingeniería financiera moderna.

Desde el punto de vista financiero, el concepto de **VaR**, o valor en riesgo, se origina en la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio de instrumentos financieros podría enfrentar en un período predefinido de tiempo (Jorion 2000, Penza y Bansal 2001, Best 1998, y Dowd 1998). Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria financiera es calcular el **VaR** con un nivel de significancia del 5% (probabilidad de excedencia de 0.05). Esto significa que solamente el 5% de las veces el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el **VaR**, en relación con el retorno esperado, esto aplicado a un instrumento financiero cuya ejecución se realiza periódicamente.

Sin embargo, el concepto de **VaR** no se debe limitar a instrumentos financieros de ejecución periódica, ya que el riesgo existe asociado a todas las decisiones que toma una organización, independientemente que el retorno asociado se genere como la suma de múltiples retornos periódicos (diarios, semanales, mensuales, ...) o como consecuencia de una eventualidad.

Consideremos el caso en que w representa al vector de las variables asociadas al entorno aleatorio, x al vector de decisiones, $\phi(w)$ a la función de distribución multivariada de probabilidad (**fdp**) de w y $f(x|w)$ una medida de rendimiento de las decisiones. La función acumulada de probabilidad de que $f(x|w)$ no exceda un límite superior α es

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x|w) \leq \alpha} \phi(w) \, dw$$

y es no-decreciente y continua con respecto a α

Si se define $\alpha_\beta(x)$ como el **VaR** asociado al nivel de probabilidad β si se toma una decisión x se cumple

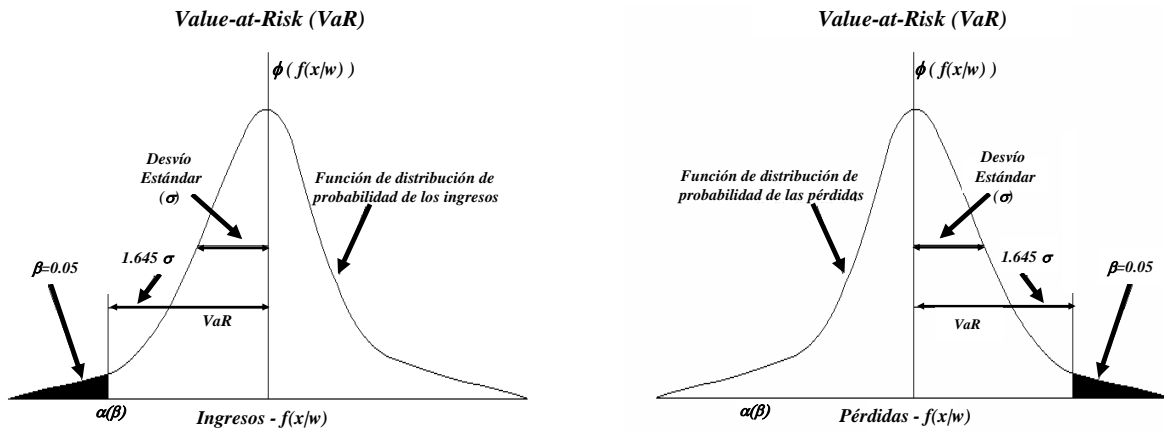
$$\alpha_\beta(x) = \min \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \Psi(x, \alpha) \geq \beta \}$$

estrictamente se cumple que

$$\Psi(x, \alpha_\beta(x)) = \beta$$

y que la probabilidad que $f(x|w)$ sea mayor que α es igual $1-\beta$.

La siguiente gráfica ilustra el anterior concepto para el caso de la función de distribución de probabilidad normal, para el caso de pérdidas y para el caso de ingresos



3.3.2 CONDITIONAL VALUE-AT-RISK (CVaR)

A pesar de que **VaR** es una medida del riesgo simple y fácil de comprender, presenta propiedades matemáticas no deseables (Artzner et al. 1999) tales como la no-subaditividad que implica que el **VaR** correspondiente a dos instrumentos puede ser mayor que la suma individual de los **VaRs** asociado a cada uno de los ellos. Adicionalmente, el **VaR** es difícil de introducir en modelos de optimización estocástica basados en el concepto de escenarios debido a su carácter no-convexo (Mausser and Rosen 1991)

Por las anteriores razones se introduce el concepto de **Conditional Value-at-Risk, CVaR** (Palmquist et al. 1999), similar al concepto de **VaR**, y con propiedades matemáticas más atractivas. **CVaR** también es conocido como el exceso de pérdida esperado (mean excess loss) y por definición, para el caso de ingresos, corresponde al valor esperado dado que los ingresos no-exceden el valor $\alpha_{\beta}(x)$ asociado al **VaR**. Para el caso de pérdidas, matemáticamente **CVaR** se expresa como

$$\varphi_{\beta}(x) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x/w) \geq \alpha_{\beta}(x)} f(x/w) \phi(w) \partial w$$

La anterior expresión se puede escribir como

$$\varphi_{\beta}(x) = \alpha_{\beta}(x) + (1-\beta)^{-1} \int_{w \in W} \max[0, f(x/w) - \alpha_{\beta}(x)] \phi(w) \partial w$$

Si se considera w como perteneciente a un universo discreto de H escenarios, cada uno de ellos con probabilidad θ_h , se tiene

$$\varphi_{\beta}(x) = \alpha_{\beta}(x) + (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1, H} \max[0, f(x/w_h) - \alpha_{\beta}(x)] \theta_h$$

donde w_h representa el valor de las variables aleatorias correspondientes al escenario h . Para el caso de ingresos el **CVaR** se escribe

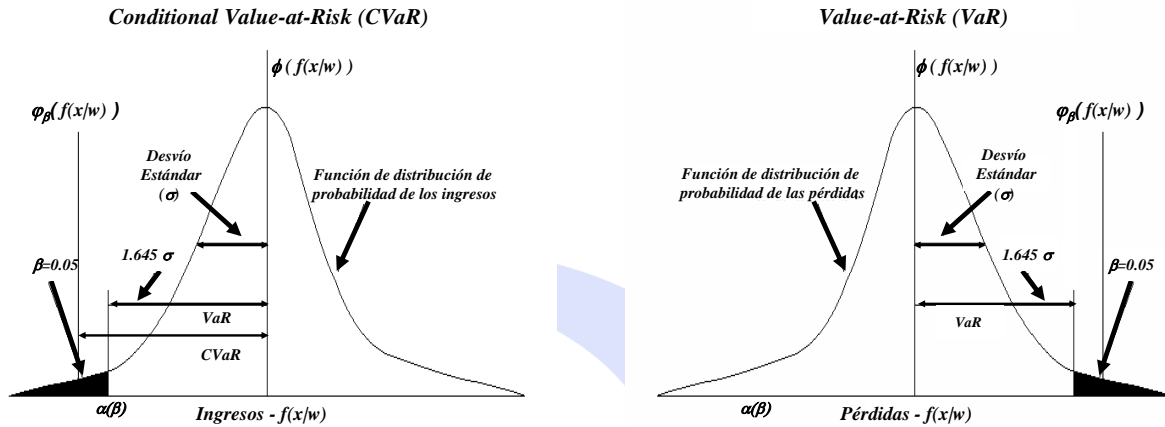
$$\varphi_{\beta}(x) = \alpha_{\beta}(x) - (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1, H} \max[0, f(x/w_h) - \alpha_{\beta}(x)] \theta_h$$

CVaR es subaditiva (Artzner et al. 1999) y convexa (Mausser and Rosen 1991) y corresponde a una medida de riesgo más conservadora que **VaR**, ya que se cumple

$$\alpha_{\beta}(x) \leq \varphi_{\beta}(x)$$

El CVaR es comúnmente utilizado en los modelos de optimización estocástica cuando se desea minimizar el valor en riesgo o se desea acotarlo. Más aún, cuando la función de distribución es normal se puede demostrar que estas dos medidas producen resultados equivalentes (Rockafellar and Uryasev 2000).

La siguiente gráfica ilustra el anterior concepto para el caso de la función de distribución de probabilidad normal, para el caso de pérdidas y para el caso de ingresos



3.4. CRITERIO DE DECISIÓN

A diferencia de la optimización determinística, la optimización estocástica debe enfrentar problemas de subjetividad relacionados con las actitudes que tienen los decisores frente al riesgo. En este aspecto no hay una solución única que se pueda considerar como óptima universalmente, y parte del proceso de toma de decisiones está relacionado con el manejo por parte del decisor de estos conceptos. En Velásquez (2005) se analizan varios criterios que puede escoger el decisor para determinar la “mejor” decisión, lo que está directamente asociado a la función objetivo de los modelos matemáticos, dentro de los criterios analizados están:

- Valor esperado
- Mean-Varianza
- Máximo Arrepentimiento
- Máxima pérdida o mínimo ingreso
- Valor esperado con restricciones sobre el riesgo.

Este último criterio es el que se utilizará en este estudio y por lo tanto se estudia su formulación con detenimiento.

El enfoque de optimización estocástica no solo permite solucionar el problema de decisión bajo incertidumbre sino que facilita la síntesis probabilística de la solución, ya que todas las variables involucradas se pueden caracterizar probabilísticamente por medio de funciones de distribución de probabilidad empíricas que pueden ser sujetas a pruebas de hipótesis o a cualquier otro análisis estadístico.

Con base en las características probabilísticas de los costos, es posible introducir restricciones relacionadas con el nivel de riesgo asociado a la decisión x . A manera de ejemplo se citan los siguientes tipos de restricciones simples que acotan:

- El máximo costo con un conjunto de restricciones del tipo

$$f(x/w_h) \leq \text{COSTO MÁXIMO} \quad \forall h=1, H$$

- El valor esperado del costo con una restricción del tipo

$$\sum_{h=1,H} \theta_h f(x/w_h) \leq \text{COSTO ESPERADO MÁXIMO}$$

- La varianza del costo con una restricción no lineal del tipo

$$\sum_{h=1,H} [(\sum_{h=1,H} \theta_h f(x/w_h) - f(x/w_h))^2] / (H-1) \leq \text{VARIANZA MÁXIMA}$$

La popularización del **VaR** ha conllevado su introducción en los modelos de optimización estocástica. Existen varios trabajos que hacen referencia a este aspecto (Litterman 1997a 1997b, Lucas and Klaassen 1998, Puelz 2000). Para ello se propone la metodología propuesta por Palmquist et al. (1999), que se basa en considerar el **CVaR**, $\varphi_\beta(x)$, en vez del **VaR**. Existen dos posibilidades:

- Minimizar el costo esperado sujeto a una restricción que acota el valor del **CVaR**

$$\text{Min } E(x) \mid \varphi_\beta(x) \leq C_\beta$$

- Minimizar el **CVaR** sujeto a una restricción que acota el costo esperado

$$\text{Min } \varphi_\beta(x) \mid E(x) \leq \sigma$$

donde $E(x)$ representa el valor esperado de los costos, $\varphi_\beta(x)$ el **CVaR**, β una determinada probabilidad. Los valores C_β y σ corresponden a límites que se imponen respectivamente al riesgo y/o a las expectativas de costos esperados.

Consideremos la introducción del **CVaR** en un modelo de optimización estocástica cuya función de utilidad es el costo esperado y se desea acotarlo. Si se considera w como perteneciente a un universo discreto de H escenarios la definición de **CVaR** es

$$\varphi_\beta(x) = \alpha_\beta(x) + (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1,H} \max[0, f(x/w_h) - \alpha_\beta(x)] \theta^F_h$$

donde $\alpha_\beta(x)$ corresponde al **VaR** asociado al **CVaR** $\varphi_\beta(x)$. La anterior condición puede reemplazarse con base en el siguiente conjunto de inequaciones lineales

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(x) &= \alpha_\beta(x) + (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1,H} \theta^F_h \omega_h \\ \omega_h &\geq f(x/w_h) - \alpha_\beta(x) \quad \forall h=1,H \\ \omega_h &\geq 0 \quad \forall h=1,H \end{aligned}$$

donde ω_h representa el exceso de pérdida sobre el **VaR**, $\alpha_\beta(x)$, si se toma la decisión x y ocurre el escenario aleatorio w_h . Con base en la anterior definición el modelo de referencia se puede escribir como

$$\begin{aligned} \{ \text{Min } \sum_{h=1,H} [\sum_{i=1,N} \theta^F_h c_{i,h}] x_i \mid \\ \alpha_\beta + (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1,H} \theta^F_h \omega_h \leq C_\beta \\ \omega_h \geq \sum_{i=1,N} \theta^F_h c_{i,h} x_i - \alpha_\beta \quad \forall h=1,H \\ \omega_h \geq 0 \quad \forall h=1,H \\ x \in \Gamma \} \end{aligned}$$

donde α_β , el **VaR**, es un variable del modelo que es estimada por el modelo de optimización. Dado que el valor del **CVaR** depende del nivel de probabilidad, es posible incluir en un modelo múltiples restricciones sobre el **CVaR** asociadas a múltiples niveles de probabilidad, en este caso el problema de optimización queda como

$$\{ \text{Min } \sum_{h=1,H} [\sum_{i=1,N} \theta^F_h c_{i,h}] x_i \mid$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\beta_m} + (1-\beta_m)^{-1} \sum_{h=1,H} \theta^h \omega_{h,m} &\leq C_{\beta_m} \quad \forall m=1,M \\ \omega_{h,m} &\geq \sum_{i=1,N} \theta^h c_{i,h} x_i - \alpha_{\beta_m} \quad \forall h=1,H \quad \forall m=1,M \\ \omega_{h,m} &\geq 0 \quad \forall h=1,H \quad \forall m=1,M \\ &x \in \Gamma \end{aligned}$$

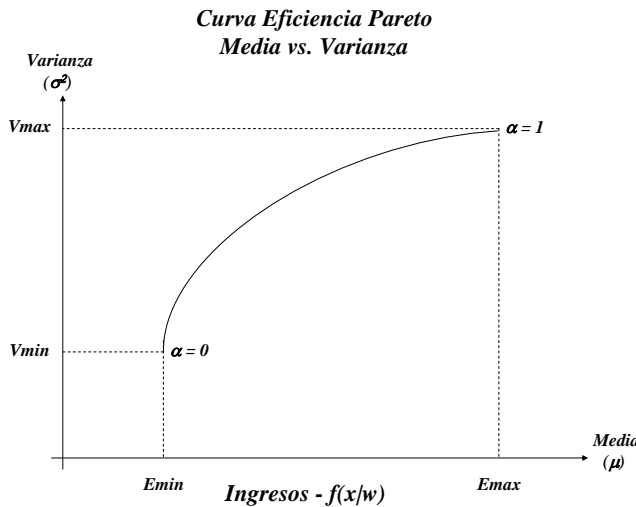
donde m es el índice asociado a los niveles de probabilidad considerados y M la cantidad de niveles. A todas las variables relacionadas con el manejo del riesgo se adiciona el índice m .

Rockafellar y Uryasev (2000) han probado que, bajo hipótesis de normalidad en las funciones de distribución de probabilidad, minimizar el CVaR o minimizar el VaR dan resultados totalmente equivalentes en lo que se refiere a las variables de decisión.

Para el caso de maximizar ingreso, la formulación del problema de maximizar el CVaR de los ingresos se expresa como

$$\begin{aligned} \{ \text{Max } \sum_{h=1,H} [\sum_{i=1,N} \theta^h c_{i,h}] x_i \mid \\ \alpha_{\beta_m} - (1-\beta_m)^{-1} \sum_{h=1,H} \theta^h \omega_{h,m} &\geq C_{\beta_m} \quad \forall m=1,M \\ \omega_{h,m} &\geq \alpha_{\beta_m} - \sum_{i=1,N} \theta^h c_{i,h} x_i \quad \forall h=1,H \quad \forall m=1,M \\ \omega_{h,m} &\geq 0 \quad \forall h=1,H \quad \forall m=1,M \\ &x \in \Gamma \end{aligned}$$

Si se resuelve paramétricamente múltiples problemas minimizando el CVaR y restringiendo el valor de la pérdida esperada, o el de los ingresos esperados, es posible construir fronteras eficientes tal como lo presenta la siguiente gráfica



3.5. PROBLEMAS DINÁMICOS MULTI-ETAPAS

Los procesos decisorios del mundo real son más complejos que el problema estático descrito previamente, ya que la toma de decisiones se da en un proceso continuo en el que iterativamente: se observa el mundo real, se toma una decisión, se observa el mundo real, se toma una nueva decisión y así sucesivamente. Para representar lo anterior, los modelos de optimización estocástica dinámicos deben tener en cuenta la representación de la forma como se lleva a cabo el proceso de toma de decisiones, en los que se asocian etapas del modelo a conjuntos de períodos en los que al

comienzo de la etapa se toma una decisión y durante la etapa ocurre la realización del proceso estocástico que afecta al sistema, para la nueva etapa se conoce la realización del proceso y se toma una nueva decisión que corrige o balancea la decisión previamente tomada, condicionada en la realización del proceso estocástico. Este tipo de modelos se denominan como “Multistage Stochastic Programs with Recourse”.

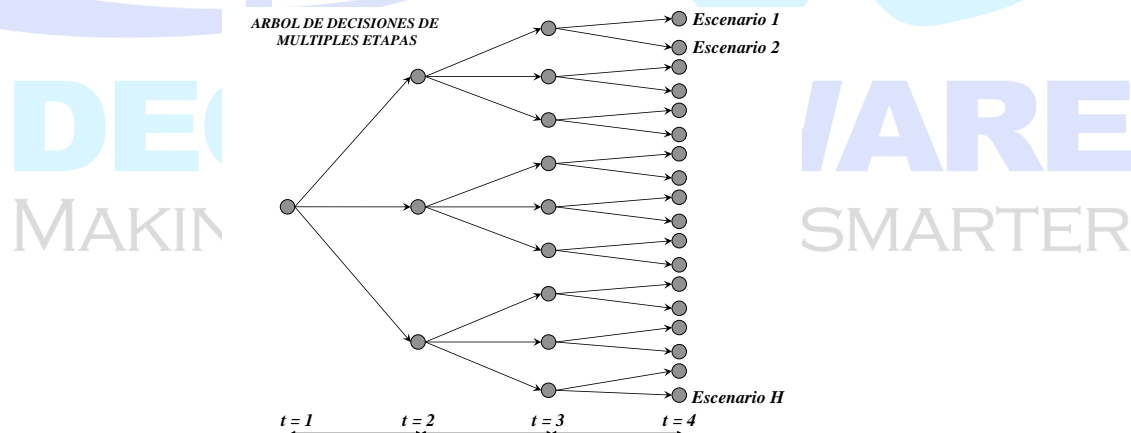
Las principales características de este tipo problema pueden resumirse como:

- una etapa normalmente representa un intervalo de tiempo (período);
- el inicio de la primera etapa corresponde el momento presente, aquí y ahora;
- al inicio de cada etapa se sabe determinísticamente lo que puede pasar en dicha etapa, y se sabe probabilísticamente lo que puede pasar en las etapas posteriores;
- al inicio de la primera etapa, deben tomarse las decisiones antes de la realización del proceso estocástico) en las etapas futuras;
- una vez se conoce la realización del proceso estocástico en una etapa, se puede corregir, o balancear, las decisiones que se realizaron previamente a conocer la realización del proceso estocástico en dicha etapa; y
- la bondad de la decisión se mide como una función del costo total que consiste en el valor determinístico de la función de utilidad en la primera etapa más el valor esperado en las etapas futuras.

A continuación, se presenta la formulación matemática de este tipo de problema. Se considera el caso correspondiente a la función de utilidad relacionada con el valor esperado, dejando para un numeral posterior el análisis cuando se utilizan otros criterios para la función objetivo.

Consideremos un proceso decisorio de múltiples etapas, el cual puede interpretarse como un encadenamiento de múltiples árboles de dos etapas. Al comienzo de la primera etapa, identificada como $t=1$, se toma la decisión x_1 , posteriormente, durante el período asociada a la duración de la etapa 1, ocurre una realización del proceso estocástico w_1 ; posteriormente a que dicho proceso ocurre se debe tomar una nueva decisión x_2 y esperar a la realización w_2 para posteriormente tomar la decisión x_3 y así sucesivamente hasta llegar a la última etapa ($t=T$), último período del horizonte de planificación.

El anterior proceso puede representarse por un árbol de decisiones de múltiples etapas. En el árbol compuesto por ramas y nodos, cada rama corresponde a un escenario h y cada nodo n a un estado de toma de decisiones.



Para describir la topología del proceso decisorio se requieren las siguientes definiciones:

- h** índice asociado a los escenarios (ramas)
- n** índice asociado a los nodos
- t** índice asociado a las etapas
- N** número total de nodos
- H** número total de escenarios

T	número total de etapas
$e(n)$	etapa a la pertenece el nodo n
$N(t)$	conjunto de nodos asociados a la etapa t
B_n	conjunto de escenarios asociados al nodo n (scenario bundle)
$a(n)$	nodo que antecede al nodo n
$p(n)$	conjunto de nodos que suceden al nodo n
$m(t,h)$	nodo asociado al escenario h en la etapa t
$np(n,h)$	nodo posterior al nodo n en la rama (escenario) h .
$NE(h)$	conjunto de nodos a través de los cuales pasa el escenario h

Para describir las posibilidades de transición a lo largo del árbol se requieren las siguientes definiciones

θ_n^N	probabilidad de que el proceso pase por el nodo n
θ^h	probabilidad de que ocurra el escenario h
$\phi_{n1,n2}$	probabilidad condicionada que ocurra una transición entre el nodo $n1$ y el nodo $n2$
θ_n	probabilidad condicionada del nodo n dado que el proceso estocástico llegó al nodo $a(n)$

Para coherencia de la descripción probabilística se debe cumplir

$$\sum_{n \in N(t)} \theta_n = 1 \quad \forall t=2,T$$

$$\phi_{n1,n2} = \theta_{n2} / \sum_{n \in p(n1)} \theta_n \quad \forall n1 \in N \quad \forall n2 \in p(n1)$$

$$\theta_n = \phi_{a(n),n} \quad \forall n \in N$$

$$\theta^h = \prod_{t=1,T} \theta_{m(t,h)} \quad \forall h \in ESC$$

Siguiendo el enfoque de programación dinámica, un problema dinámico estocástico de múltiples etapas, **MS-SP**: se puede formular de la siguiente forma:

$$MS-SP: = \{ \text{Min } f(x_1) + \mathcal{Q}(x_1) \mid x_1 \in \Gamma \}$$

donde x_1 representa a la decisión que se debe tomar en la etapa 1, $f(x_1)$ a la función de costo directo asociado a la decisión x_1 , $\mathcal{Q}(x_1)$ a la función de costo futuro esperado asociado a la decisión x_1 y Γ al espacio de factibilidad de x_1 . $\mathcal{Q}(x_t)$ se define como:

$$\mathcal{Q}(x_t) = \int_{w_t \in W_t} Q_{t+1}(x_t/w_t) \phi(w_t) \partial w_t$$

donde, para $t+1$ diferente a la última etapa, $Q_{t+1}(x_t/w_t)$ se define como:

$$\{ Q_{t+1}(x_t/w_t) = \text{Min } f(x_{t+1}/w_t) + \mathcal{Q}(x_{t+1}) \mid x_{t+1} \in \Omega(x_t/w_t) \}$$

donde x_t representa la decisión que se toma en la etapa t una vez se conozca la realización del proceso estocástico representado por w_{t-1} y $\Omega(x_{t-1}/w_{t-1})$ el espacio factible para dicha decisión. Para la última etapa $Q_T(x_{T-1}/w_{T-1})$ es igual a

$$\{ Q_T(x_{T-1}/w_{T-1}) = \text{Min } f(x_T/w_{T-1}) \mid x_T \in \Omega(x_{T-1}/w_{T-1}) \}$$

Para w perteneciente a un espacio muestral discreto, consideremos como caso particular un problema lineal estocástico multi-etapa **MS-SLP**: (Multi-Stage Stochastic Linear Programming), que con base en la transición entre nodos se puede formular como:

$$\begin{aligned}
 MS-SP: = \{ & \text{Min } c_1^T y_1 + \sum_{t=2,T} \sum_{n \in N(t)} \theta^n [c_{t,n}^T y_{t,n}] / \\
 & W_1 y_1 = b_1 - T_0 y_0 \\
 & W_{2,n} y_{2,n} = b_{2,n} - T_{2,n} y_1 \quad \forall n \in N(2), \\
 & W_{t,n} y_{t,n} = b_{t,n} - T_{t,n} y_{t-1,a(n)} \quad \forall t=3,T \quad \forall n \in N(t) \\
 & y_1 \in \mathbb{R}^+ \\
 & y_{t,n} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t=2,T \quad \forall n \in N(t) \}
 \end{aligned}$$

donde el índice n representa el nodo, y_1 el vector de decisiones de la etapa inicial, y_n el vector de decisiones si el sistema llega en la etapa t al nodo n . Los vectores $c_{t,n}$ y $b_{t,n}$, las matrices $W_{t,n}$ y $E_{t,n}$ son elementos en los que al menos uno de ellos depende de la condición aleatoria que lleva al sistema al nodo n .

Una formulación más compacta se puede obtener si se elimina de manera explícita el índice t dejándolo implícito en la relación de los nodos con las etapas. En este caso la formulación quedaría como

$$\begin{aligned}
 MS-SP: = \{ & \text{Min } c_1^T y_1 + \sum_{n \in N} \theta^n [c_n^T y_n] / \\
 & W_1 y_1 = b_1 - T_0 y_0 \\
 & W_n y_n = b_n - T_n y_{a(n)} \quad \forall n \in N \\
 & y_1 \in \mathbb{R}^+ \\
 & y_n \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in N) \}
 \end{aligned}$$

donde el índice n representa el nodo, y_n el vector de decisiones si el sistema llega al nodo n y c_n , b_n , W_n y E_n están asociados directamente al nodo al que pertenecen.

El problema lineal estocástico multi-etapa **MS-SLP**: es frecuentemente formulado de una manera dinámica equivalente utilizando lo que se conoce como “split columns” o “split variables” (Higle et. al. 2002). Bajo este enfoque se consideran decisiones independientes para cada posible escenario ignorando las restricciones no-anticipativas:

$$\begin{aligned}
 W_{t,n} x_{t,n} &= b_{t,n} - T_{t,n} x_{t-1,a(n)} \\
 &\forall t=3,T \quad \forall n \in N(t)
 \end{aligned}$$

Para garantizar la no anticipatividad en las decisiones, es decir simular decisiones en las que no se sabe que es lo que va a pasar, pero si se sabe que es lo que puede pasar, se requiere incorporar restricciones de igualdad para las decisiones pertenecientes a una misma rama del árbol y que por lo tanto tienen la misma historia.

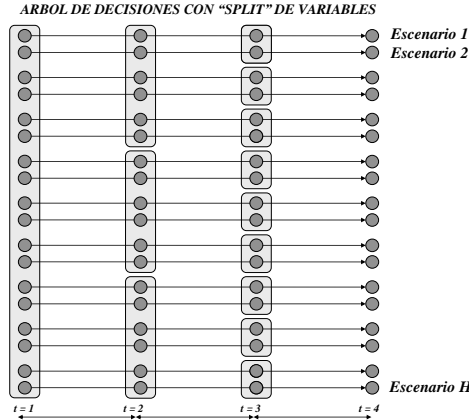
Definamos el vector de variables de decisión $x_{t,h}$ como la decisión que se toma en la etapa t si ocurre el escenario h (transición por la rama h del árbol). Para garantizar la no anticipatividad se requiere introducir una restricción que relacione las variables z_n , asociadas a las decisiones que se toman en el nodo n con las variables $x_{t,h}$ asociadas a todos los escenarios pertenecientes a B_n que pasan por el nodo n lo que implica formular la restricción de no-anticipatividad como

$$\begin{aligned}
 z_n &= x_{e(n),h} \\
 \forall n \in N \quad \forall h \in B_n
 \end{aligned}$$

En este caso z_n se conoce como variables de estado de la información (information state vectors, Higle et. al. 2002). La anterior ecuación también puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 z_{m(t,h)} &= x_{t,h} \\
 \forall h \in H \quad \forall t=1,T
 \end{aligned}$$

donde $m(t,h)$ representa el nodo asociado al período t del escenario h .



Las anteriores formulaciones son equivalentes a una restricción de no anticipatividad formulada solo con base en las variables $x_{t,h}$

$$x_{t,h} = x_{t,h1} \\ \forall t=2,T \quad \forall n \in N \quad \forall h \in B_n \quad \forall h1 \neq h \in B_n$$

La restricción de no-anticipatividad también puede formularse de manera explícita como (Birge 1997)

$$E[\underline{x}_n] = x_{e(n),h} \\ \forall n \in N \quad \forall h \in B_n$$

donde \underline{x}_n representa el valor esperado condicionado de las decisiones en el nodo n . Lo anterior puede escribirse como

$$\sum_{h \in B_n} \phi_{n,np(n),h} x_{e(n),h} = x_{e(n),h} \\ \forall n \in N \quad \forall h \in B_n$$

donde $np(n,h)$ representa el nodo posterior al nodo n en la rama (escenario) h .

El problema equivalente se expresa como

$$MS-SP^{SC}: = \{ \text{Min } \sum_{t=1,T} \sum_{h=1,H} \theta^h [c_{t,h}^T x_{t,h}] \mid \\ W_{t,h} x_{t,h} = b_{t,h} - T_{t,h} x_{t-1,h} \quad \forall t=1,T \quad \forall h=1,H \\ z_n = x_{e(n),h} \quad \forall n \in N \quad \forall h \in B_n \\ x_{t,h} \in R^+ \quad \forall t=1,T \quad \forall h=1,H \}$$

Nótese que las decisiones iniciales también son incluidas como pertenecientes a un escenario, pero que la condición de no anticipatividad hace que su valor sea único al final del proceso de optimización.

En el anterior modelo es posible incluir restricciones para controlar el riesgo, siguiendo los lineamientos presentados en el numeral anterior. La formulación incluyendo restricciones sobre el CVaR queda

$$MS-SP^{CVaR}: = \{ \text{Min } \sum_{t=1,T} \sum_{h=1,H} \theta^h [c_{t,h}^T x_{t,h}] \mid \\ W_{t,h} x_{t,h} = b_{t,h} - T_{t,h} x_{t-1,h} \quad \forall t=1,T \quad \forall h=1,H$$

$$\begin{aligned}
 z_n &= x_{e(n),h} \quad \forall n \in N \quad \forall h \in B_n \\
 x_{t,h} &\in \mathbf{R}^+ \quad \forall t=1,T \quad \forall h=1,H \\
 \alpha_\beta + (1-\beta)^{-1} \sum_{h=1,H} \theta^x_h \omega_h &\leq \phi_\beta \\
 \omega_h &\geq \sum_{t=1,T} c_{t,h} x_{t,h} - \alpha_\beta \quad \forall h=1,H \\
 \omega_h &\geq 0 \quad \forall h=1,H \}
 \end{aligned}$$

donde ϕ_β es el límite que se impone al riesgo a través del CVaR, ω_h el exceso de pérdida sobre el VaR si ocurre el escenario h y α_β una variable escalar igual al VaR, que estima el modelo de optimización. Esta es la formulación genérica que se utilizará para los modelos ALM que se formularan posteriormente.

4. GENERACIÓN DE ESCENARIOS DEL PROCESO ESTOCÁSTICO

Dado que el enfoque de optimización estocástica para resolver el problema requiere incluir la incertidumbre implícita en el comportamiento en el tiempo de las variables consideradas en los escenarios del problema que se representan por medio de la descripción probabilística del comportamiento futuro de variables aleatorias de interés sobre. Para construir el árbol de escenarios existen diferentes alternativas basadas en criterios subjetivos u objetivos. La alternativa más simple y con mayor nivel de subjetividad consiste en consultar a un experto que pueda determinar con precisión razonable información relevante sobre la evolución de las variables aleatorias de interés. Otras alternativas más objetivas se basan en el supuesto de que la evolución futura del proceso estocástico que representa el comportamiento de las variables aleatorias puede describirse a partir del comportamiento histórico de las mismas, bien sea construyendo la distribución de probabilidad asociada a un proceso estocástico multivariado, o los momentos estadísticos más relevantes. Para ello, es necesario modelar dicho comportamiento de alguna manera, bien sea por métodos analíticos o algoritmos de simulación.

La generación de los escenarios es parte fundamental del problema de optimización estocástica, ya que de ellos depende la calidad de la solución obtenida. Si los escenarios no son representativos del proceso estocástico que se da en el entorno del proceso de toma de decisiones, se puede afirmar que si “garbage in, garbage out”. El arte de generar escenarios pertenece a un campo especializado propio de cada problema, y en muchos casos es más complejo que el problema de optimización estocástica, en lo que se refiere a los procedimientos matemáticos para su solución, una vez están dados los escenarios, o las características probabilísticas de los mismos.

Con respecto al manejo del proceso estocástico, los métodos para resolver MS-SP pueden clasificarse en: i) los métodos basados en escenarios (MBE, scenario-based methods) que utilizan una muestra fija, parcial o total, de realizaciones del proceso estocástico (escenarios); y ii) los métodos Montecarlo basados en muestras aleatorias (MBM, sampling-based methods) en los que iterativamente se muestrean realizaciones del proceso estocástico a medida que progresa el algoritmo de solución.

Los métodos basados en escenarios, MBE, normalmente aproximan un problema estocástico con base en un número tecnológicamente manejable de escenarios que permiten resolver el problema por medio de un modelo determinístico equivalente de gran tamaño, en los que el método de solución se concentra en encontrar el punto que cumple con las condiciones de optimalidad del problema equivalente. En los casos en que la cantidad de escenarios considerados es menor al número de escenarios posibles, lo que ocurre para todo proceso estocástico con variables continuas, se obtiene la solución exacta de un problema aproximado.

Los métodos basados en muestras dinámicas (Monte-Carlo Based Methods, MBM) representan explícitamente el espacio muestral completo (qué para propósitos prácticos puede ser de tamaño infinito) y utilizan muestras sucesivas para desarrollar algoritmos que convergen con algún sentido probabilístico a la solución óptima cuando la cantidad de iteraciones tiende a infinito. En la práctica se requieren de pruebas estadísticas para determinar el criterio de convergencia y las propiedades de la solución obtenida después de un número finito de iteraciones (Higle y Sen 1991). Bajo este enfoque se resuelve aproximadamente el problema exacto.

Por otra parte, los métodos **MBM** son, por esencia, probabilísticos y por lo tanto la solución obtenida corresponde a una variable aleatoria; en ellos se deben considerar dos aspectos en el proceso de solución: i) el muestreo y ii) la convergencia, aspectos que están íntimamente relacionados, ya que en un proceso de simulación Monte-Carlo, el proceso de generación de variables aleatorias debe tener en cuenta técnicas de reducción de varianza con la finalidad de reducir el esfuerzo computacional requerido para conseguir determinados niveles de confianza en los estimadores de las variables aleatorias que son resultado de la simulación.

Para el modelo **ALM** a implementar se utilizará el enfoque de generación exógena de escenarios de forma tal de formular un problema determinístico equivalente al de optimización estocástica.

4.1. MODELAJE DEL PROCESO ESTOCÁSTICO

El comportamiento de las variables financieras a lo largo del tiempo suele estar sujeto a la influencia de factores aleatorios que conllevan a que dichas variables sean procesos estocásticos por naturaleza. Con el fin de caracterizar dicho comportamiento en términos de la distribución de probabilidad del valor que puede tomar la variable en cualquier instante del tiempo, y/o los momentos estadísticos de dicha distribución, es posible utilizar modelos de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, (SDE) por sus siglas en inglés, que asumen que el valor de una variable en un instante del tiempo determinado está en función de los valores de la variable en instantes anteriores y del efecto de un proceso aleatorio causante de la incertidumbre. Si es posible demostrar que un valor futuro depende únicamente del efecto del valor presente y de un proceso aleatorio, el comportamiento de la variable puede modelarse como un proceso estocástico Markoviano, lo que implica que no tiene memoria.

En términos generales, puede decirse que identificar el tipo particular de proceso estocástico que permite modelar adecuadamente el comportamiento de una variable financiera no es un asunto trivial, además de que esta tarea puede implicar costos computacionales considerables (Lägländ 2003). Para efectos ilustrativos, en este estudio se utilizará un tipo de proceso de Markov particular denominado Movimiento Browniano Geométrico el cual, además de modelar con precisión razonable la mayoría de series financieras, posee una estructura matemática que permite estimar con relativa facilidad los parámetros del modelo matemático del proceso.

El proceso de Movimiento Browniano Geométrico puede representarse mediante la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t + \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

donde X_t es el valor de la variable en el instante t μ se conoce como el parámetro de “drift”, σ como el parámetro de difusión, dW_t es un proceso de ruido blanco o proceso de Wiener que se distribuye normalmente con media cero y varianza lineal t y X_0 la condición inicial que se asume igual a x .

En este estudio las variables financieras y las de operaciones consideradas en el proceso de planeación (i.e., tasas de mercado, precios de instrumentos de renta variable, tasas de descuento de instrumentos de renta fija, tasas de préstamo y tasas de riesgo) son modeladas analíticamente utilizando ecuaciones diferenciales estocásticas, particularmente Movimientos Brownianos Geométricos, con el fin de obtener los momentos estadísticos de primer orden de cada una de las variables aleatorias y los co-momentos de segundo orden de los diferentes procesos estocásticos cruzados, (i.e. producto de cualesquiera dos variables aleatorias).

Al lector interesado en los detalles del proceso de estimación se le refiere a Lägländ (2003), a Flórez (2005) y/o al Anexo B del presente informe.

4.2. GENERACIÓN DEL ÁRBOL DE ESCENARIOS

Una vez se ha caracterizado el proceso estocástico, es posible proceder a la generación del árbol de escenarios, proceso para el cual existen múltiples alternativas.

En el presente estudio la generación de escenarios se realiza por medio de la solución a un problema de optimización que busca determinar: i) realizaciones del proceso estocástico en cada etapa del árbol que conserven las propiedades estadísticas del proceso estocástico (por ejemplo, los momentos estadísticos; y ii) las probabilidades de transición condicionales en el árbol. Un modelo menos complejo puede desarrollarse combinando criterios subjetivos y objetivos en el que las probabilidades condicionales de transición se estiman a priori con base en algún criterio subjetivo, y las realizaciones del proceso estocástico se calculan a partir de un modelo matemático que busca minimizar las diferencias entre las propiedades estadísticas de las realizaciones del árbol y las del proceso estocástico multivariado real.

Para construir el árbol se propone determinar las variables aleatorias en cada rama del árbol por medio de un modelo de mínimos cuadrados que minimiza el error cuadrático medio de los momentos y co-momentos muestrales con respecto a los momentos y co-momentos estimados a partir del modelo del proceso estocástico. De esta manera se está preservando la variabilidad observada en el tiempo y en el espacio. Los co-momentos pueden ser variantes a través de las etapas (en el tiempo) lo que permite representar procesos no estacionarios (media dinámica) heterocedásticos (varianza variante en el tiempo).

A continuación, se presenta la formulación de un modelo matemático que permite determinar las realizaciones del proceso estocástico en cada etapa, con base en los momentos de primer orden y los co-momentos de segundo orden, que asume que la correlación entre etapas no es significativa. Esta formulación es un caso particular de la formulación general presentada en Lågland (2003), la cual deja abierta la posibilidad de incluir co-momentos de orden superior.

Asumiendo la probabilidad de cada escenario preestablecida, el modelo de generación de escenarios sintéticos para cada etapa t se puede formular como



DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER

5. MODELO ALM PARA LA INDUSTRIA DE SEGUROS

5.1. GENERALIDADES

A continuación, se presenta la formulación de un modelo matemático **ALM** aplicado a la industria de seguros. En términos generales la organización objeto del modelaje se concibe compuesta por negocios (ramos) de seguros de diferente tipo, cada uno con sus propias peculiaridades. Dentro de cada negocio se asume que es posible segmentar el mercado de tal forma de controlar la concentración de riesgos en los diferentes negocios y entre segmentos de un mismo negocio. La formulación considera los aspectos normativos propios del sector seguros en Colombia, por lo tanto, dichas ecuaciones tienen aplicabilidad relativa a empresas colombianas y deberán ajustarse para empresas de países con una reglamentación diferente.

En la formulación algebraica del modelo se utiliza la siguiente nomenclatura:

ÍNDICES:

Los índices utilizados en la formulación matemática son

t	Período (etapa).
tv	Período.
q	Período.
i	Tipo de inversión (activo)
p	Pasivo con bancos
n	Ramo ó negocio de seguro
s	Segmento dentro del ramo ó negocio
e	Escenario aleatorio.
h	Escenario aleatorio.

CONJUNTOS:

Los conjuntos utilizados en la formulación matemática son:

T	Períodos del horizonte de planificación
PRU	Períodos en que el reasegurador da a la compañía participación de sus utilidades.
PPD	Períodos en que la compañía reparte dividendos.
PTI	Períodos en que la compañía paga impuestos.
FFF	Períodos en que los bonos (inversiones renta fija) presentan flujo de caja.
$TV(i)$	Períodos en que se paga el valor nominal del bono ($i \in IRF$).
TCA	Períodos en que la compañía emite acciones para capitalizarse.
III	Tipos de inversiones (activos) en que puede invertir la compañía sus reservas.
IRE	Tipos de inversiones de renta variable, en que puede invertir la compañía con fondos provenientes de las reservas técnicas de acuerdo con la normatividad legal ($IRE \subseteq III$).
IRF	Tipos de inversiones de renta fija, en que puede invertir la compañía con fondos provenientes de las reservas técnicas de acuerdo con la normatividad legal ($IRE \subseteq III$).
ICS	Tipos de inversión en compañías de seguros
NEG	Ramos o negocios de seguros de la compañía.
$SEG(n)$	Segmentos dentro del ramo de seguro (negocio) n .
PPP	Bancos.
ESC	Escenarios aleatorios

5.2. RESTRICCIONES Y VARIABLES

A continuación, se presentan las ecuaciones del modelo; en tanto no se diga lo contrario, las restricciones aplican para $\forall t \in T, \forall n \in NEG, \forall s \in SEG(n), \forall e \in ESC$. las variables se van definiendo en la medida que son utilizadas en las ecuaciones del modelo.

Las variables fundamentales del modelaje son:

$VAS_{t,n,s,e}$ monto total asegurado por segmento s del ramo de seguro (negocio) n en el período t si ocurre la condición aleatoria e .

$INV_{t,i,e}$ inversión en activo i en el período t si ocurre la condición aleatoria e .

Todas las expresiones matemáticas del modelo son directa o indirectamente función de dichas variables, las cuales son las que determinan el riesgo asumido por la compañía.

5.2.1 VALOR ASEGURADO Y PRIMAS.

Las primas emitidas durante un período se establecen como una fracción del monto asegurado. Se asume que la compañía tiene una política de financiación de la prima por un período y que por lo tanto una fracción de dichas primas se expiden para ser pagadas en el siguiente período a la fecha de emisión; sin embargo, no todas las primas financiadas son pagadas por los clientes debiéndose proceder a cancelarlas. Durante el período comprendido entre la fecha de emisión y la fecha de cancelación la compañía asume el riesgo correspondiente al valor asegurado, como si la prima ya estuviese pagada.

- **$VAP_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS:**

Las primas por cobrar en un negocio son función del porcentaje del monto asegurado que determina la base para establecer la tarifa.

$$PET_{t,n,s,e} = FPT_{n,s} \times VAP_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FPT_{n,s}$ Fracción (porcentaje sobre 100) del monto asegurado que se toma como base para establecer la tarifa para el segmento s del negocio n .

Variables:

$VAP_{t,n,s,e}$ Valor asegurado (vendido) en el segmento s del negocio n durante el período t si ocurre el escenario e .

$PET_{t,n,s,e}$ Primas emitidas en el segmento s del negocio n durante el período t si ocurre el escenario e .

- **$EAT_{t,n,s,e}$ VALOR ASEGURADO TOTAL:**

La totalidad de valores asegurados que tiene la compañía al final del período t es igual a los valores asegurados que traía de períodos anteriores, más los nuevos valores asegurados que suscribe, menos los valores asegurados que pierden vigencia, menos las cancelaciones que se presentan.

$$VAT_{t,n,s,e} = VAT_{t-1,n,s,e} + VAP_{t,n,s,e} - (1 - FPC_{n,s}) \times VAP_{t-PVP(n,s),n,s,e} - FPC_{n,s} \times VAP_{t-1,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FPC_{n,s}$ Fracción de primas emitidas que el cliente queda por pagar en el próximo período y que no pagará (cancelará) correspondientes al segmento s del negocio n . En realidad es un parámetro aleatorio porque no depende de las decisiones de la compañía, sino que depende de las condiciones de pago de los clientes en cuyo caso su expresión sería: $FPC_{n,s,e}$

$PVP(n,s)$ Cantidad de períodos de vigencia de la póliza en el segmento s del negocio n .

Variables:

$VAT_{t,n,s,e}$ Valor asegurado total al final del período t en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

▪ **$EET_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS TOTALES:**

Las primas emitidas en un período se dividen en: i) primas emitidas recaudadas durante el mismo período; ii) primas emitidas que quedan para recaudar en el siguiente período y que el cliente paga; y iii) primas emitidas que quedan para recaudar en el siguiente período y que se cancelan porque el cliente no las paga.

$$PET_{t,n,s,e} = PER_{t,n,s,e} + PPR_{t,n,s,e} + PNR_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$PER_{t,n,s,e}$ Primas emitidas en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e que son recaudadas en el mismo período t .

$PPR_{t,n,s,e}$ Primas emitidas en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e que son recaudadas en el período $t+1$.

$PNR_{t,n,s,e}$ Primas emitidas en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e que se deberían recaudar en el período $t+1$ pero que el cliente no paga

▪ **$PRI_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS RECAUDADAS INMEDIATAMENTE:**

Las primas emitidas en un período y que se recaudan en el mismo período.

$$PER_{t,n,s,e} = FPP_{n,s} \times PET_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FPP_{n,s}$ Fracción de las primas emitidas que el cliente paga inmediatamente correspondientes al segmento s del negocio n . En realidad es un parámetro aleatorio porque no depende de las decisiones de la compañía, sino que depende de las condiciones de pago de los clientes en cuyo caso su expresión sería: $FPP_{n,s,e}$

▪ **$PRS_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS RECAUDADAS AL SIGUIENTE PERÍODO:**

Las primas emitidas en el período t que se dejan para recaudar el próximo período y que el cliente paga.

$$PPR_{t,n,s,e} = FPR_{n,s} \times PET_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FPR_{n,s}$ Fracción de primas emitidas que el cliente queda por pagar en el próximo período y que en efecto sí pagará (no cancelará), correspondientes al segmento s del negocio n . En realidad es un parámetro aleatorio porque no depende de las decisiones de la compañía, sino de las condiciones de pago de los clientes y su expresión sería $FPR_{n,s,e}$.

▪ **$PRN_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS NO RECAUDADAS AL SIGUIENTE PERÍODO:**

Las primas emitidas en el período t pero que se dejan para recaudar el próximo período y que el cliente no paga, por lo tanto, corresponden a las primas canceladas.

$$PNR_{t,n,s,e} = FPC_{n,s} \times PET_{t,n,s,e}$$

En términos generales se debe cumplir

$$1 - FPP_{n,s} = FPC_{n,s} + FPR_{n,s}$$

▪ **ECI_{t,s,e} COMISIONES A INTERMEDIARIOS:**

La compañía debe pagar a sus intermediarios (fuerza de venta) una comisión previamente estipulada sobre el total de las primas que ellos emitan período a período siempre y cuando éstas no sean canceladas (el pago de las comisiones a los intermediarios se hace inmediatamente, aunque las primas sean recaudadas después).

$$CPI_{t,e} = FPI \times \sum_n \sum_s [PET_{t,n,s,e} \times (1 - FPC_{n,s})]$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FPI Fracción que la compañía le paga a sus intermediarios como comisión sobre las primas emitidas en el período *t* si ocurre el escenario *e*.

Variables:

CPI_{t,e} Comisión que la compañía le paga a sus intermediarios en el período *t* si ocurre el escenario *e*.

5.2.2. VALORES REASEGURADOS Y PRIMAS CEDIDAS.

▪ **ERP_{t,n,s,e} VALOR REASEGURADO DEL PERÍODO:**

Parte del valor asegurado que la compañía cede bajo la modalidad de reaseguro por contrato proporcional (cuota parte), contrato no proporcional (exceso de pérdida) y contrato facultativo.

$$VRP_{t,n,s,e} = (RRP_n + RRN + RRF_n) \times VAP_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

RRN_n Fracción de las primas emitidas que se le ceden al reasegurador bajo la modalidad de reaseguro por contrato no proporcional (exceso de pérdida) del negocio *n*.

RRP_n Fracción de las primas emitidas que se le ceden al reasegurador bajo la modalidad de reaseguro por contrato proporcional (cuota aparte) del negocio *n*.

RRF_n Fracción de las primas emitidas que se le ceden al reasegurador bajo la modalidad de reaseguro por contrato facultativo del negocio *n*.

Variables:

VRP_{t,n,s,e} Valor reasegurado durante período *t* en el segmento *s* del negocio *n* si ocurre el escenario *e*.

Las fracciones de primas que se ceden bajo cualquiera de las modalidades de reaseguro, se establecen con base en una política de la compañía exógena al modelo. Si el valor reasegurado fuera decisión de la compañía se debe, cambiar la anterior ecuación por una que represente ese proceso.

▪ **ETR_{t,n,s,e} VALOR TOTAL REASEGURADO:**

Valor que la compañía mantiene bajo la modalidad de reaseguro, es igual al valor reasegurado que se traía, más el valor que se reasegura en ese período, menos los reaseguros que han perdido vigencia, menos la parte de reaseguros cedidos del período anterior, pero que el cliente canceló.

$$VRT_{t,n,s,e} = VRT_{t-1,n,s,e} + VRP_{t,n,s,e} - (1 - FPC_{n,s}) \times VRP_{t-PVP(n,s),n,s,e} - FPC_{n,s} \times VRP_{t-1,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$VRT_{t,n,s,e}$ Valor reasegurado al final del período t en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

▪ **$ECE_{t,n,s,e}$ PRIMAS CEDIDAS:**

Las primas que se le ceden al reasegurador tanto en contratos proporcionales (cuota aparte), como en contratos no proporcionales (exceso de pérdidas) y contratos facultativos, dichas primas se ceden sobre las primas que realmente recauda la compañía, es decir, no tiene en cuenta las cancelaciones. Las primas que se le ceden al reasegurador se le pagan al siguiente período.

$$PCT_{t,n,s,e} = (PER_{t,n,s,e} + PPR_{t,n,s,e}) \times (RRP_n + RRN_n + RRF_n)$$

donde:

Variables:

$PCT_{t,n,s,e}$ Primas cedidas al reasegurador en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

▪ **$ECR_{t,n,s,e}$ COMISIONES DE REASEGURADORES:**

La compañía recibe una comisión (pactada en el contrato) sobre las primas cedidas y que no se cancelaron, por parte del reasegurador.

$$CDR_{t,e} = FCR \times \sum_n \sum_s PCT_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FCR Fracción que la compañía recibe de sus reaseguradores como comisión sobre las primas cedidas en el período t si ocurre el escenario e . Las comisiones que los reaseguradores le pagan a la compañía son muy similares entre los negocios, para efectos del modelaje se va a tomar que éstos pagan la misma comisión por cada tipo de negocio.

Variables:

$CDR_{t,e}$ Comisión que la compañía recibe de sus reaseguradores en el período t si ocurre el escenario e .

▪ **$EPU_{t,n,s,e}$ PARTICIPACIÓN DE UTILIDADES DE LOS REASEGURADORES:**

Cuando las utilidades de los reaseguradores superan cierto valor estipulado por ellos, éstos le ceden anualmente a la compañía una fracción de dichas utilidades por buenos resultados.

$$PUR_{t,e} = FUR \times UDR_{t,e} \text{ si y solo si } UDR_{t,e} \geq UMR_{t,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FUR Fracción que los reaseguradores le ceden a la compañía como participación de sus utilidades.

Parámetros aleatorios:

UMR_{t,e} Utilidad mínima que debe generar el reasegurador para darle participación de sus utilidades al a compañía en el período t si ocurre el escenario e .

Variables:

PUR_{t,e} Participación de las utilidades que el reasegurador le cede a la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

$UDR_{t,e}$ Utilidad del reasegurador en el período t si ocurre el escenario e . (Es completamente exógena al modelo).

5.2.3. RESERVA TÉCNICA DE RIESGO EN CURSO

- $CRR_{t,n,s,e}$ **CONSTITUCIÓN RESERVA TÉCNICA DE RIESGO EN CURSO:**
La constitución de la reserva técnica de riesgo en curso (primas) es igual al porcentaje que dicte la reglamentación para cada ramo durante un período específico multiplicado por la totalidad de las primas retenidas.

$$CRC_{t,n,s,e} = PCR_n \times PRT_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

PCR_n Fracción de las primas retenidas que reglamentación estipula se debe constituir como reserva técnica para el negocio n .

Variables:

$CRC_{t,n,s,e}$ Cantidad que se constituye como reserva técnica de riesgo en curso en el período t para el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

$PRT_{t,n,s,e}$ Primas retenidas totales en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

- $RVR_{t,n,s,e}$ **RESERVA TÉCNICA DE RIESGO EN CURSO:**
El total de la reserva técnica de riesgo en curso sobre primas al final de un período es igual a la cantidad de reserva que se traía menos las liberaciones que se vayan haciendo cada periodo más las nuevas constituciones.

$$RRC_{t,n,s,e} = RRC_{t-1,n,s,e} - \sum_{q=t-PVP(n,s),t} FLR_{n,s} \times CRC_{q,n,s,e} + CRC_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FLR_{n,s}$ Fracción de la reserva técnica de riesgo en curso que se libera dependiendo del negocio n y el segmento s . Se cumple

$$FLR_{n,s} = 1/PVP(n,s)$$

Variables:

$RRC_{t,n,s,e}$ Reserva técnica de riesgo en curso en el período t en el negocio n del segmento s si ocurre el escenario e .

5.2.4. SINIESTROS

- $VAS_{t,n,s,e}$ **VALOR DEL SINIESTRO:**
El valor de los siniestros corresponde a una fracción (variable aleatoria) del valor asegurado. Los siniestros se le pagan al asegurado al siguiente período.

$$SIN_{t,n,s,e} = TDR_{t,n,s,e} \times VAT_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros aleatorios:

$TDR_{t,n,s,e}$ Conocida como la tasa de riesgo, es la fracción del valor asegurado total correspondiente al valor de los siniestros durante el período t en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

Corresponde a una variable aleatoria cuyo valor se determina para cada escenario durante el proceso de generación de los mismos.

Variables:

$SIN_{t,n,s,e}$ Valor de los siniestros ocurridos durante el período t en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

- $RCP_{t,n,s,e}$ **REEMBOLSO DE LOS SINIESTROS REASEGURADOS – CONTRATO PROPORCIONAL:**
El valor del siniestro que el reasegurador debe retornar a la compañía es el porcentaje del riesgo que ésta le cedió de manera proporcional, es decir, el porcentaje del riesgo reasegurado y que es igual a la multiplicación del porcentaje reasegurado por el valor del siniestro liquidado; el porcentaje reasegurado depende del ramo en que se esté trabajando y el valor del reembolso se recibe al siguiente período.

$$RSP_{t,n,s,e} = RRP_n \times SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$RSP_{t,n,s,e}$ Valor que el reasegurador debe rembolsar a la compañía en el período t por concepto del porcentaje del riesgo que ésta le cedió en reaseguro de manera proporcional, de los siniestros ocurridos en el período $t-1$ en el segmento s para el negocio n si ocurre el escenario e .

- $RCN_{t,n,s,e}$ **REEMBOLSO DE LOS SINIESTROS REASEGURADOS – CONTRATO NO PROPORCIONAL:**
El valor del siniestro que el reasegurador debe retornar a la compañía es el porcentaje del riesgo que ésta le cedió de manera no proporcional, es decir, el porcentaje del riesgo reasegurado y que es igual a la multiplicación del porcentaje reasegurado por el valor del siniestro liquidado; el porcentaje reasegurado depende del ramo en que se esté trabajando y el valor del reembolso se recibe al siguiente período.

$$RSN_{t,n,s,e} = RRN_n \times SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$RSN_{t,n,s,e}$ Valor que el reasegurador debe rembolsar a la compañía en el período t por concepto del porcentaje del riesgo que ésta le cedió en reaseguro de manera no proporcional, de los siniestros ocurridos en el período $t-1$ en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

- $RCF_{t,n,s,e}$ **REEMBOLSO DE LOS SINIESTROS REASEGURADOS – CONTRATO FACULTATIVO:**
El valor del siniestro que el reasegurador debe retornar a la compañía es el porcentaje del riesgo que ésta le cedió por medio de un contrato facultativo, es decir, el porcentaje del riesgo reasegurado y que es igual a la multiplicación del porcentaje reasegurado por el valor del siniestro liquidado; el porcentaje reasegurado depende del ramo en que se esté trabajando y el valor del reembolso se recibe al siguiente período.

$$RSF_{t,n,s,e} = RRF_n \times SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$RSF_{t,n,s,e}$ Valor que el reasegurador debe rembolsar a la compañía en el período t por concepto del porcentaje del riesgo que ésta le cedió en reaseguro por medio de un contrato facultativo, de los siniestros ocurridos en el período $t-1$ en el segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

El tipo de contrato de reaseguro que se escoja depende del ramo.

▪ **$RTT_{t,n,s,e}$ CONSTITUCIÓN RESERVA TÉCNICA DE SINIESTROS**

El valor de las reservas que se encuentran constituidas para siniestros, se hacen una vez el siniestro es avisado a la compañía de seguros, por el valor del mismo.

$$RTS_{t,n,s,e} = SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$RTS_{t,n,s,e}$ Cantidad que se constituye de reserva de siniestros en el período t en el negocio n del segmento s si ocurre el escenario e .

En la práctica las constituciones de reservas técnicas de siniestros se realizan en el momento en que un siniestro es avisado a la compañía aseguradora y esta hace una estimación del valor del mismo para realizar la reserva respectiva; luego cuando el valor real del siniestro se conoce se procede a la liquidación del mismo. Para facilitar el modelamiento del problema se tomó la decisión de constituir las reservas técnicas de siniestros de un período como el valor de la variable “valor del siniestro y no hay una acumulación de reserva técnica de siniestros porque éstas reservas se liberan inmediatamente al período siguiente.

▪ **$SIR_{t,n,s,e}$ SINIESTROS RETENIDOS:**

El valor de los siniestros que asume directamente (retiene) la compañía es igual al valor de los siniestros, menos la fracción de dichos siniestros que se le ceden al reasegurador tanto en contratos proporcionales, como en no proporcionales y en facultativos.

$$SRT_{t,n,s,e} = SIN_{t,n,s,e} \times (1 - RRP_n - RRN_n - RRF_n)$$

donde:

Variables:

$SRT_{t,n,s,e}$ Siniestros retenidos por la compañía en el período t el negocio n el segmento s si ocurre el escenario e .

▪ **$ESA_{t,n,s,e}$ SALVAMENTOS:**

Los salvamentos ocurren cuando parte del bien que se siniestra se puede recuperar.

$$SAL_{t,n,s,e} = FRS_{n,s,e} \times SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Parámetros aleatorios:

$FRS_{n,s,e}$ Fracción del bien siniestrado que se puede recuperar del negocio n segmento s si ocurre el escenario e . (Es completamente exógeno al modelo).

Variables:

$SAL_{t,n,s,e}$ Valor de los salvamentos que recupera la compañía en el período t del negocio n segmento s si ocurre el escenario e .

- **$ESR_{t,n,s,e}$ SALVAMENTOS DE REASEGURADORES:**
En caso de que la compañía logre recuperar algo del bien siniestrado debe cederle al reasegurador una parte de este salvamento siguiendo la proporción que dicho reasegurador le cubrió.

$$SAR_{t,n,s,e} = SAL_{t,n,s,e} \times (RRP_n + RRN_n + RRF_n)$$

donde:

Variables:

$SAR_{t,n,s,e}$ Valor de los salvamentos que la compañía le cede al reasegurador en el período t del negocio n segmento s si ocurre el escenario e .

5.2.5. INVERSIONES

- **$NIR_{t,e}$ NIVEL DE INVERSIONES DE LAS RESERVAS TECNICAS:**
Las inversiones totales que se tengan en un período, tanto de renta variable (para el modelaje, acciones) como de renta fija (en este caso TES de cupón fijo), deben ser mayores o iguales a las reservas técnicas, tanto de riesgo en curso como de siniestros, y a las reservas legales, estatutarias y ocasionales.

$$\sum_{i \in IRE} PRM_{t,i,e} \times ACC_{t,i,e} + \sum_{i \in IRF} VBO_{t,i,e} \times NBO_{t,i,e} \geq \sum_{n \in NEG} \sum_{s \in SEG(n)} RRC_{t,n,s,e} + \sum_{n \in NEG} \sum_{s \in SEG(n)} RTS_{t,n,s,e} + REL_{t,e} + RTT_{t,e} + ROC_{t,e}$$

donde:

Parámetros aleatorios:

$PRM_{t,i,e}$ Precio de mercado de la inversión, de acciones, tipo i en el período t si ocurre el escenario e .
 $VBO_{t,i,e}$ Precio de mercado de la inversión, de renta fija tipo i en el período t si ocurre el escenario e .

Variables aleatorias:

$ACC_{t,i,e}$ Cantidad de acciones del tipo i al final del período t si ocurre el escenario e .
 $NBO_{t,i,e}$ Cantidad de bonos del tipo i al final del período t si ocurre el escenario e .
 $REL_{t,e}$ Reservas legales en el período t si ocurre el escenario e .
 $RTT_{t,e}$ Reservas estatutarias en el período t si ocurre el escenario e .
 $ROC_{t,e}$ Reservas ocasionales en el período t si ocurre el escenario e .

- **$EAC_{t,i,e}$ VOLUMEN DE ACCIONES:**
El número de acciones de renta variable que tiene la compañía corresponde al número de acciones que tenía el período anterior, más las nuevas acciones que compre, menos las acciones que venda.

$$ACC_{t,i,e} = ACC_{t-1,i,e} + NCA_{t,i,e} - NVA_{t,i,e} \quad \forall i \in IRE$$

donde:

Variables aleatorias:

$NCA_{t,i,e}$ Cantidad de acciones que se compran de la inversión tipo i durante el período t si ocurre el escenario e .
 $NVA_{t,i,e}$ Cantidad de acciones que se venden de la inversión tipo i durante el período t si ocurre el escenario e .

- **$IRV_{t,i,e}$ INVERSIONES RENTA VARIABLE (ACCIONES):**

El valor de las inversiones de renta variable, en las cuales se tienen invertidas las reservas técnicas, es igual a las inversiones que se traían más las compras de inversiones (acciones) que se hagan, menos las ventas de inversiones (acciones), más la valorización de las inversiones (acciones) que se tenían. Se asume que la compra y venta de acciones en un período se hace de manera proporcional.

$$INV_{t,i,e} = INV_{t-1,i,e} + NCA_{t,i,e} \times [PRM_{t-1,i,e} + (PRM_{t,i,e} - PRM_{t-1,i,e})/2] - NVA_{t,i,e} \times [PRM_{t-1,i,e} + (PRM_{t,i,e} - PRM_{t-1,i,e})/2] + [(ACC_{t-1,i,e} + ACC_{t,i,e})/2] \times (PRM_{t,i,e} - PRM_{t-1,i,e})$$

$\forall i \in IRE$

Ecuación que es equivalente a:

$$INV_{t,i,e} = ACC_{t,i,e} \times PRM_{t,i,e}$$

donde:

Variables:

$INV_{t,i,e}$ Total de la inversión de renta variable, tipo i en el período t si ocurre el escenario e .

▪ **$BON_{t,i,e}$ VOLUMEN DE BONOS:**

El volumen de bonos de renta fija que tiene la compañía corresponde al número de bonos que tenía el período anterior, más los nuevos bonos que compre, menos los bonos que se vende. Se asume que la compañía compra y vende bonos a los cuales les falta una misma cantidad de períodos, trimestres, para su vencimiento y que lo hace sólo al final de cada trimestre.

$$NBO_{t,i,e} = NBO_{t-1,i,e} + NCB_{t,i,e} - NVB_{t,i,e}$$

$\forall i \in IRF$

donde:

Parámetros determinísticos:

$PVB(i)$ Cantidad de períodos de vigencia del bono.

Variables aleatorias:

$NCB_{t,i,e}$ Cantidad de bonos que se compran de la inversión tipo i durante el período t , si ocurre el escenario e .

$NVB_{t,i,e}$ Cantidad de bonos que se venden de la inversión tipo i durante el período t si ocurre el escenario e .

▪ **$IRJ_{t,i,e}$ INVERSIONES RENTA FIJA:**

El valor de las inversiones de renta fija, en las cuales se tienen invertidas las reservas técnicas, es igual a las inversiones que se traían más las compras de nuevas inversiones (bonos), menos las ventas que se hagan, más la valorización que estos bonos ganen.

$$RFI_{t,i,e} = RFI_{t-1,i,e} + NCB_{t,i,e} \times VBO_{t,i,e} - NVB_{t,i,e} \times VBO_{t,i,e} + (VBO_{t,i,e} - VBO_{t-1,i,e}) \times NBO_{t-1,i,e}$$

$\forall i \in IRF$

Ecuación que es equivalente a:

$$RFI_{t,i,e} = NBO_{t,i,e} \times VBO_{t,i,e}$$

donde:

Variables:

$RFI_{t,i,e}$ Total de la inversión en renta fija, tipo i en el período t si ocurre el escenario e .

▪ **$VDB_{t,i,e}$ VALOR DEL BONO:**

El valor del bono es el valor presente de sus flujos de caja descontados a la tasa de mercado de ese período.

$$VBO_{t,i,e} = \sum_{q \geq t} [FCP_{q,i} \times (1+TEA_{t,e})^{-(q-t) \times 90/360}]$$

$$\forall i \in IRF$$

donde:

Parámetros determinísticos:

$FCP_{t,i}$ Flujos de caja del período t del bono tipo i (incluye el cupón y en los períodos que correspondan, el capital)

Parámetros aleatorios:

$TEA_{t,e}$ Tasa del mercado efectiva anual del período t si ocurre el escenario e .

Variables:

$VBO_{t,i,e}$ Valor, en el período t del bono tipo i si ocurre el escenario e .

▪ **$MVI_{t,i,e}$ MOVIMIENTO POR INVERSIONES EN ACCIONES:**

Los movimientos en caja se realizan con base en los precios de venta y de compra o con base en el precio del mercado y un costo por transacción (fracción)

$$IEV_{t,i,e} = NVA_{t,i,e}(1-CTV_i) \times PRM_{t,i,e} - NCA_{t,i,e}(1+CTV_i) \times PRM_{t,i,e}$$

$$\forall i \in IRE$$

donde

Parámetros determinísticos:

CTV_i Fracción del costo que se carga como costo de transacción del tipo de inversión i

Variables:

$IEV_{t,i,e}$ Ingreso neto (ingresos menos egresos) debido al cambio en el nivel de inventarios en inversión tipo i al final del período t si ocurre el escenario e .

▪ **$MVF_{t,i,e}$ MOVIMIENTO POR INVERSIONES RENTA FIJA:**

Es el valor total de los egresos por concepto de compra de inversiones de renta fija y es igual al valor de la inversión, más el costo de transacción.

$$IEF_{t,i,e} = NVB_{t,i,e}(1-CTF_i) \times VBO_{t,i,e} - NCB_{t,i,e}(1+CTF_i) \times VBO_{t,i,e}$$

$$\forall i \in IRF$$

donde:

Parámetros determinísticos:

CTF_i Fracción del costo que se carga como costo de transacción del tipo de inversión i .

NVB_i Valor nominal del bono tipo i .

Variables:

$IEF_{t,i,e}$ Ingreso neto (ingresos menos egresos) debido al cambio en el nivel de inventarios en inversión tipo, al final del período t si ocurre el escenario e .

- **$RRF_{t,e}$ RENDIMIENTO INVERSIONES RENTA FIJA:**
Son los ingresos por los rendimientos (cupones y principal) de las inversiones en bonos de renta fija.

$$RIF_{t,e} = \sum_{i \in IRF} NBO_{t,i,e} \times FDC_{t,i}$$

donde:

Variables:

$RIF_{t,e}$ Rendimiento de las inversiones en bonos durante el período t si ocurre el escenario e .
 $FDC_{t,i}$ Flujos de caja del período t del bono tipo i (incluye solo el valor del cupón).

- **$RBR_{t,i,e}$ RESTRICCIÓN LIMITE GLOBAL DE LAS INVERSIONES DE RESERVAS TÉCNICAS:**
Los saldos disponibles en caja no pueden superar un 3% del valor total del portafolio (Decreto 2779 de 2001).

$$SMC \times (\sum_{i \in IRE} PRM_{t,i,e} \times ACC_{t,i,e} + \sum_{i \in IRF} VBO_{i,e} \times NBO_{t,i,e}) \geq DIS_{t,e}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

SMC Fracción, que, de las reservas, se puede mantener como máximo en caja; por ley esta estipulado en 0.03

Variables:

$DIS_{t,e}$ Valor del disponible (dinero en caja) de la compañía durante el período t si ocurre el escenario e .

- **$RIR_{t,i,e}$ RESTRICCIÓN LIMITE INDIVIDUAL DE LAS INVERSIONES DE RESERVAS TÉCNICAS:**
La inversión en uno o varios instrumentos de una misma entidad, emisor o fondo, no puede exceder del 10% del valor del portafolio (Decreto 2779 de 2001)

$$FMI \times (\sum_{i \in IRE} PRM_{t,i,e} \times ACC_{t,i,e} + \sum_{i \in IRF} VBO_{i,e} \times NBO_{t,i,e}) \geq PRM_{t,i,e} \times ACC_{t,i,e} \quad \forall i \in IRE$$

$$FMI \times (\sum_{i \in IRE} PRM_{t,i,e} \times ACC_{t,i,e} + \sum_{i \in IRF} VBO_{i,e} \times NBO_{t,i,e}) \geq VBO_{i,e} \times NBO_{t,i,e} \quad \forall i \in IRF$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FMI Fracción máxima que se puede invertir en cada acción o bono, por ley esta estipulada en 0.10.

5.2.6. MARGEN DE SOLVENCIA Y PATRIMONIO TÉCNICO

- **$PMB_{t,e}$ PRIMAJE BÁSICO:**
El primaaje que se utiliza para el cálculo del margen de solvencia en función de las primas.

$$PRB_{t,e} = \text{Min} [\sum_n \sum_s PET_{t,s,n,e} ; 7'500''] \times 0.18 + \text{Máx} [0 ; \sum_n \sum_s PET_{t,s,n,e} - 7'500''] \times 0.16$$

donde:

Variables:

PRB_{t,e} Primaje básico en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

Se debe notar que en el momento de correr el modelo y para facilitar el modelaje, el mínimo que se escoge es 7'500" ya que según los datos históricos que se tienen, la sumatoria de las primas emitidas sobre los segmentos y negocios ($\sum_n \sum_s PET_{t,s,n,e}$) siempre es mucho mayor que 7'500"; lo anterior tiene su explicación en que la norma que rige esta ecuación está elaborada con datos de las industrias aseguradoras del año 1988.

- **FDR_{t,e} FACTOR DE RETENCIÓN:**
Muestra cuanto asume la compañía por cada peso que ocurre de siniestro.

$$FRT_{t,e} = \text{Máx} [0.05 ; \sum_n \sum_s SRT_{t,s,n,e} / \sum_n \sum_s SIN_{t,s,n,e}]$$

donde:

Parámetros aleatorios:

FRT_{t,e} Factor de retención total en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **MDP_{t,e} MARGEN DE SOLVENCIA EN FUNCIÓN DE LAS PRIMAS:**
La cuantía del margen de solvencia en función de las primas es igual al primaje básico multiplicado por el factor de retención.

$$MSP_{t,e} = PRB_{t,e} \times FRT_{t,e}$$

donde:

Variables:

MSP_{t,e} Margen de solvencia en función de las primas en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **SIT_{t,e} SINIESTROS TOTALES:**
El valor total de los siniestros pagados durante los últimos tres años.

$$STO_{t,e} = \sum_{q \in [t-12;t-1]} \sum_n SIN_{q,n,e} + \sum_{q \in [t-12;t-1]} \sum_n SAL_{q,n,e} + \sum_{q \in [t-4;t-1]} \sum_n RTS_{q,n,e} - \sum_{q \in [t-16;t-13]} \sum_n RTS_{q,n,e}$$

donde:

Variables:

STO_{t,e} Siniestros totales de los tres últimos años en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **MFS_{t,e} MARGEN DE SOLVENCIA EN FUNCIÓN DE LOS SINIESTROS:**
La cuantía del margen de solvencia en función de los siniestros es igual a los siniestros totales multiplicados por el factor de retención.

$$MSS_{t,e} = STO_{t,e} \times FRT_{t,e}$$

donde:

Variables:

MSS_{t,e} Margen de solvencia en función de los siniestros en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **EMS_{t,e} MARGEN DE SOLVENCIA:**

El margen de solvencia de la compañía es el mayor valor entre el margen de solvencia en función de las primas y el margen de solvencia en función de los siniestros.

$$MSL_{t,e} = \text{Máx} [MSP_{t,e}, MSS_{t,e}]$$

donde:

Variables:

$MSS_{t,e}$ Margen de solvencia de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

▪ $ECP_{t,e}$ **CAPITAL PRIMARIO:**

Resultado de la sumatoria del capital social, más las reservas legales, más la prima en colocación de acciones, menos las inversiones en otras compañías de seguros menos las pérdidas de ejercicios anteriores.

$$CAP_{t,e} = CSP_{t,e} + REL_{t,e} + PCA_{t,e} - ICS_{t,e} - PEJ_{t,e}$$

donde:

Variables:

$CSP_{t,e}$ Capital suscrito y pagado que se tiene en el período t si ocurre el escenario e .

$CAP_{t,e}$ Capital primario de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

$PCA_{t,e}$ Valor que la compañía tiene en colocación de acción de acciones al final del período t si ocurre el escenario e .

$ICS_{t,e}$ Inversiones que la compañía tiene en otras compañías de seguro al final del período t si ocurre el escenario e .

$PEJ_{t,e}$ Pérdidas de los ejercicios anteriores al período t si ocurre el escenario e .

Para facilitar el modelaje sólo se tomaron estas cuentas ya que son las más importantes, sin embargo, en el Anexo que describe el sector seguro se describen todas las cuentas que se consideran dentro del patrimonio primario.

▪ $ECS_{t,e}$ **CAPITAL SECUNDARIO:**

Resultado de la suma de las reservas estatutarias, más las reservas ocasionales, más la valorización de las inversiones mientras éstas sean menores que el 50% del capital primario, en caso de ser mayor, sólo se toma este último valor.

$$CAS_{t,e} = RTT_{t,e} + ROC_{t,e} + \text{Min} [\sum_i VAL_{t,i,e} + VTB_{t,e}; 0.5 \times CAP_{t,e}] + RPA_{t,e}$$

donde:

Variables:

$CAS_{t,e}$ Capital secundario de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

$RTT_{t,e}$ Reservas estatutarias en el período t si ocurre el escenario e .

$VAL_{t,i,e}$ Valorización / desvalorización de las acciones tipo i en el período t si ocurre el escenario e .

$RPA_{t,e}$ Resultado del ejercicio (incluye los resultados de los ejercicios anteriores más el resultado del ejercicio siempre y cuando éste sea positivo) en el período t si ocurre el escenario e .

Para facilitar el modelaje sólo se tomaron estas cuentas ya que son las más importantes, sin embargo, en el Anexo que describe el sector seguro se describen todas las cuentas que se consideran dentro del patrimonio secundario.

▪ $EPT_{t,e}$ **PATRIMONIO TÉCNICO:**

Se obtiene de sumar el capital primario más el capital secundario.

$$PAT_{t,e} = CAP_{t,e} + CAS_{t,e}$$

donde:

Variables:

$PAT_{t,e}$ Patrimonio técnico de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

- $RMS_{t,e}$ **RESTRICCIÓN MARGEN DE SOLVENCIA:**
En cada uno de los períodos el margen de solvencia de la compañía debe ser igual o mayor que su patrimonio técnico.

$$MSL_{t,e} \geq PAT_{t,e}$$

5.2.7. FLUJO DE CAJA

- $EFC_{t,i,e}$ **DISPONIBLE:**
Valor del dinero disponible que la compañía tiene en su caja, es el resultado de sumar todos sus ingresos y restarle la suma de todos sus egresos.

$$\begin{aligned} DIS_{t,e} = & DIS_{t-1,e} + \sum_n \sum_s PER_{t,n,s,e} + \sum_n \sum_s PPR_{t-1,n,s,e} - \sum_n \sum_s PCT_{t-1,n,s,e} - \sum_n \sum_s SIN_{t-1,n,s,e} + \sum_n \sum_s RSP_{t-1,n,s,e} \\ & + \sum_n \sum_s RSN_{t-1,n,s,e} + \sum_n \sum_s RSF_{t-1,n,s,e} + \sum_i \in IRF IEV_{t,i,e} + \sum_i \in IRF IEF_{t,i,e} + \sum_i \in IRF RIF_{t,i,e} \\ & + \sum_i \in IRF (NOM_i \times NBO_{n,i,e}) + PCA_{t,e} + \sum_n \sum_s SAL_{t,n,s,e} - \sum_n \sum_s SAR_{t,n,s,e} + CDR_{t-1,e} \\ & - DIV_{t,e} - IPB_{t-1,e} - IMR_{t,e} + PUR_{t,e} - CPI_{t,e} - GDA_t - GDP_t - CPB_{t-1,e} + CPB_{t,e} \end{aligned}$$

donde:

Parámetros determinísticos:

GDA_t Gasto de administración de la compañía en el período t .

GDP_t Gasto de personal de la compañía en el período t .

NOM_i Valor nominal del bono tipo i .

Variables:

$IPB_{t,e}$ Intereses pagados a los bancos en el período t si ocurre el escenario e .

$DIV_{t,e}$ Dividendos a pagar en el período t si ocurre el escenario e .

$CPB_{t,p,e}$ Deuda con el banco p , en el período t si ocurre el escenario e .

$IMR_{t,e}$ Impuestos que debe pagar la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

5.2.8. ESTADO DE RESULTADOS –PYG-

- $PTT_{t,n,s,e}$ **PRIMAS RETENIDAS TOTALES:**
Las primas con las que realmente se queda la compañía después de haber cedido unas en reaseguro y haber tenido en cuenta las cancelaciones.

$$PRT_{t,n,s,e} = PET_{t,n,s,e} \times (1 - FPC_{n,s}) - PCT_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$PCT_{t,n,s,e}$ Primas cedidas al reasegurador en el período t correspondientes al segmento s del negocio n si ocurre el escenario e .

- $EPD_{t,e}$ **PRIMAS DEVENGADAS:**

Correspondientes a las ya transcurridas dentro del período total del amparo.

$$PRD_{t,e} = \sum_n \sum_s PRT_{t,n,s,e} - \sum_n \sum_s CRC_{t,n,s,e} + \sum_{q=t-PVP(n,s),t} \sum_n \sum_s FLR_n \times CRC_{q,n,s,e}$$

donde:

Variables:

PRD_{t,e} Primas devengadas totales al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

▪ **ESI_{t,e} SINIESTROS INCURRIDOS:**

Siniestros que realmente paga la compañía y son los siniestros retenidos, más las constituciones del período, menos las liberaciones que se hacen que corresponden a los siniestros del período anterior.

$$SII_{t,e} = \sum_n \sum_s (SRT_{t,n,s,e} + RTS_{t,n,s,e} - SIN_{t-1,n,s,e})$$

donde:

Variables:

SII_{t,e} Siniestros incurridos totales al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

▪ **EGAt,e GASTOS DE ADMINISTRACIÓN:**

Gastos de administración que tiene la compañía (**GDA_t**)

▪ **EGPt,e GASTOS DE PERSONAL:**

Gastos de personal que tiene la compañía (**GDP_t**)

▪ **ERT_{t,e} RESULTADO TÉCNICO:**

La utilidad antes de impuestos del ejercicio es la suma de todos los ingresos, menos la totalidad de los egresos.

$$RET^+_{t,e} - RET^-_{t,e} = PRD_{t,e} - SII_{t,e} + CDR_{t,e} - CPI_{t,e} - GDP_{t,e} - GDA_{t,e}$$

donde:

Variables:

RET⁺_{t,e} Resultado técnico positivo (ganancias) del ejercicio al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

RET⁻_{t,e} Resultado técnico negativo (pérdidas) del ejercicio al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

▪ **EIB_{t,p,e} INTERESES BANCOS Y OTRAS OBLIGACIONES FINANCIERAS:**

Totalidad de los intereses que se pagan a los bancos, es igual a la multiplicación de la tasa que cobra el banco por el valor de la deuda. Los préstamos se pagan al período siguiente al cual se toman.

$$IPB_{t,e} = \sum_p TDB_{t,p,e} \times CPB_{t,p,e}$$

donde:

Parámetros aleatorios:

TDB_{t,p,e} Tasa a la cual presta el banco **p**, en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

▪ **VDR_{t,e} VALORIZACIONES / DESVALORIZACIONES DE LAS INVERSIONES RENTA VARIABLE (ACCIONES):**

El valor de las valorizaciones o desvalorizaciones de las inversiones de renta variable, de las reservas técnicas, en el período **t** bajo el escenario **e**.

$$VAL_{t,e} = \sum_{i \in IRF} [(ACC_{t-1,i,e} + ACC_{t,i,e})/2] \times (PRM_{t,i,e} - PRM_{t-1,i,e})$$

donde:

Variables:

VAL_{t,e} Valorización / desvalorización de las acciones.

▪ **VBO_{t,e} VALORIZACIÓN TOTAL DE LOS BONOS:**

La valorización que ganan los bonos es igual al valor del bono en el período **t** menos el valor del bono en el período **t-1**.

$$VTB_{t,e} = \sum_{i \in IRF} (VBO_{t,i,e} - VBO_{t-1,i,e}) \times NBO_{t-1,i,e}$$

donde:

Variables:

VTB_{t,e} Valorización total en el período **t** de la totalidad de los bonos si ocurre el escenario **e**.

▪ **EVT_{t,e} VALORIZACIÓN TOTAL DE LAS INVERSIONES:**

La valorización total de las inversiones es la suma de la valorización de las acciones (renta variable) más la valorización total de los bonos (renta fija).

$$VTI_{t,e} = VAL_{t,e} + VTB_{t,e}$$

▪ **EUA_{t,e} UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS:**

Utilidad antes de impuestos la cual es igual al resultado técnico, menos los gastos financieros, más los otros ingresos (valorizaciones de inversiones).

$$UAI_{t,e}^+ - UAI_{t,e}^- = RET_{t,e}^+ - RET_{t,e}^- - IPB_{t,e} + VTI_{t,e} + RIF_{t,e}$$

donde:

Variables:

UAI_{t,e}⁺ Utilidad antes de impuestos positiva del ejercicio al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

UAI_{t,e}⁻ Utilidad antes de impuestos negativa (pérdida) del ejercicio al final del período **t** si ocurre el escenario **e**.

VTI_{t,e} Valorización total de las inversiones de la compañía en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

▪ **ERE_{t,e} RESULTADOS DEL EJERCICIO:**

Utilidad neta de la compañía.

$$UTI_{t,e}^+ = (1-FIR) \times UAI_{t,e}^+$$

$$UTI_{t,e}^- = (1-FIR) \times UAI_{t,e}^-$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FIR Fracción que debe pagarse al gobierno como impuesto de renta sobre las utilidades del ejercicio; está definido, por ley, en 0.35.

Variables:

$UTI_{t,e}^+$ Utilidad neta positiva (ganancias) de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .
 $UTI_{t,e}^-$ Utilidad neta negativa (pérdidas) de la compañía en el período t si ocurre el escenario e .

5.2.9. ECUACIONES DE BALANCE – ACTIVOS

- **$PRE_{t,n,s,e}$ PRIMAS EMITIDAS POR RECAUDAR:**
 Corresponde al valor de las primas que no han sido recaudadas y es igual a las primas no recaudadas que se traían del período anterior, menos las primas no recaudadas del período anterior que se recaudaron durante este período, menos las cancelaciones de primas emitidas que se produzcan en ése período, más las primas que se emitan en t y que queden por recaudar.

$$PDA_{t,n,s,e} = PDA_{t-1,n,s,e} - PPR_{t-1,n,s,e} - PNR_{t-1,n,s,e} + PPR_{t,n,s,e} + PNR_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$PDA_{t,n,s,e}$ Primas emitidas por recaudar en el período t correspondientes al negocio n el segmento s si ocurre el escenario e .

Para nuestro caso de aplicación $PDA_{t-1,n,s,e} = PPR_{t-1,n,s,e} - PNR_{t-1,n,s,e}$ porque las primas que no se pagan de una vez, se pagan al mes siguiente (no se siguen acumulando), por lo tanto la ecuación queda así:

$$PDA_{t,n,s,e} = PPR_{t,n,s,e} + PNR_{t,n,s,e}$$

- **$STC_{t,n,s,e}$ SINIESTROS REASEGURADOS POR COBRAR:**
 El valor de los reembolsos que el reasegurador debe pagar a la compañía respondiendo a la parte del siniestro reasegurado y que no ha sido cobrada. El reasegurador paga a los 30 días.

$$SRC_{t,n,s,e} = SRC_{t-1,n,s,e} - RSP_{t-1,n,s,e} - RSN_{t-1,n,s,e} - RSF_{t-1,n,s,e} + RSP_{t,n,s,e} + RSN_{t,n,s,e} + RSF_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$SRC_{t,n,s,e}$ Valor de los siniestros reasegurados que para el período t el reasegurador aún no le ha pagado a la compañía de los siniestros correspondientes al negocio n el segmento s si ocurre el escenario e .

Debido a que el reasegurador paga los reembolsos a los 30 días, los términos $SRC_{t-1,n,s,e}$ y la suma de $RSP_{t-1,n,s,e}$, más $RSN_{t-1,n,s,e}$, más $RSF_{t-1,n,s,e}$, son iguales ya que el primero significa los reembolsos que se tienen por cobrar del mes pasado (siniestros ocurridos en $t-1$), y el segundo son los reembolsos que se reciben este mes por los siniestros ocurridos el mes pasado. Por lo anterior los siniestros reasegurados por cobrar quedan resumidos a los reembolsos por cobrar de los siniestros ocurridos en el mes actual y la ecuación queda así:

$$SRC_{t,n,s,e} = RSP_{t,n,s,e} + RSN_{t,n,s,e} + RSF_{t,n,s,e}$$

5.2.10. ECUACIONES DE BALANCE – PASIVOS

- **$PRC_{t,n,s,e}$ PRIMAS CEDIDAS POR PAGAR:**
 Corresponde al valor de las primas cedidas a reaseguradores y que no se le han pagado y es igual a las primas cedidas por pagar que se traían, menos las primas cedidas por pagar que se pagan el período t menos las cancelaciones de las primas cedidas que se han realizado (en la misma proporción en que a la compañía se le cancelan primas emitidas, ésta le cancela al reasegurador primas cedidas en reaseguro), más las nuevas primas

cedidas por pagar que corresponden a las primas cedidas totales ya que a los reaseguradores las primas se les pagan a al siguiente período.

$$CTP_{t,n,s,e} = CTP_{t-1,n,s,e} - PCT_{t-1,n,s,e} + PCT_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$CTP_{t,n,s,e}$ Primas cedidas por pagar en el período t correspondientes al negocio n el segmento s si ocurre el escenario e .

Debido a que a al reasegurador se le pagan las primas al siguiente período, los términos $CTP_{t-1,n,s,e}$ y $PCT_{t,n,s,e}$ son iguales ya que el primero significa las primas cedidas por pagar que se tienen del período pasado (primas cedidas en $t-1$) y que no se han pagado, y el segundo son las primas que se le pagan de período que se pagan en el presente, por lo tanto la ecuación queda así:

$$CTP_{t,n,s,e} = PCT_t$$

▪ $SNL_{t,n,s,e}$ **SINIESTROS LIQUIDADOS POR PAGAR:**

El valor de los siniestros que deben pagarse es igual al valor total de los siniestros del período debido a que todos los siniestros se pagan al siguiente período.

$$SLP_{t,n,s,e} = SLP_{t-1,n,s,e} - SSS_{t-1,n,s,e} + SIN_{t,n,s,e}$$

donde:

Variables:

$SLP_{t,n,s,e}$ Siniestros liquidados por pagar en el período t del negocio n segmento s si ocurre el escenario e .

$SSS_{t-1,n,s,e}$ Siniestros liquidados en el período $t-1$ que se pagan en el período t correspondientes a el negocio n del segmento s si ocurre el escenario e .

Como se tiene la política de que los siniestros se pagan a los 30 días de ocurridos, los siniestros que se traen por pagar del período anterior, $SLP_{t-1,n,s,e}$, son exactamente igual a los siniestros que se pagan en el período actual, $SSS_{t-1,n,s,e}$ y por tanto la ecuación queda así:

$$SLP_{t,n,s,e} = SIN_{t,n,s,e}$$

▪ $EIP_{t,e}$ **IMPUESTOS POR PAGAR:**

Impuestos de renta que la compañía debe pagar al estado por sus utilidades.

$$IMR_{t,e} = FIR \times UAI^+_{t,e} \quad \forall t \in PTI$$

$$IMR_{t,e} = IMR_{t-1,e} + FIR \times UAI^+_{t,e} \quad \forall t \notin PTI$$

▪ $EDP_{t,e}$ **DIVIDENDOS POR PAGAR:**

Decisión operativa de la asamblea, por lo tanto, el modelo no va a calcularlo. En caso de que la asamblea decida repartir dividendos, es igual al saldo que queda de la utilidad una vez se han descontado las reservas legales, estatutarias y ocasionales, dividido entre la cantidad de acciones que se tengan de la empresa ($DIV_{t,e}$)

▪ $EBF_{t,e}$ **CUENTAS POR PAGAR BANCOS Y OTRAS ENTIDADES FINANCIERAS:**

El capital de los préstamos que la compañía hace a entidades financieras cuando su flujo de caja es negativo; dichos préstamos se pagan al período siguiente de realizarlos ($CPB_{t,e}$).

5.2.11. ECUACIONES DE BALANCE – PATRIMONIO

- **$ESP_{t,e}$ CAPITAL SUSCRITO Y PAGADO:**
Capital suscrito y pagado de la compañía que es equivalente al capital suscrito y pagado que se traía más la emisión de emisiones para capitalizar la compañía.

$$CSP_{t,e} = CSP_{t-1,e} + ACE_{t,e} \times VNA \quad \forall t \in TCA$$

donde:

Parámetros determinísticos:

VNA Valor nominal de la acción.

Variables:

$CSP_{t,e}$ Capital suscrito y pagado de la compañía en el período t si ocurre el escenario e (el capital suscrito y pagado inicial de la compañía, es un parámetro).

$ACE_{t,e}$ Cantidad de acciones que emite la empresa durante el período t si ocurre el escenario e .

- **$ECA_{t,e}$ RESTRICCIÓN CAPITAL AUTORIZADO:**
El capital suscrito y pagado de la compañía no puede ser mayor que el capital autorizado a ésta.

$$CSP_{t,e} \leq CAA$$

donde:

Parámetros determinísticos:

CAA Capital autorizado a la compañía.

- **RRL_t RESERVAS LEGALES:**
Las reservas que se deben constituir por ley en cada período.

$$REL_{t,e} = \text{Min} [REL_{t-1,e} + FCL \times UTI_{t,e}^+ ; CSP/2]$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FCL Fracción que del resultado del ejercicio se debe usar para constituir reservas legales mientras éstas sean menores que la mitad del capital suscrito y pagado; por ley esta estipulada en 0.10.

- **RST_t RESERVAS ESTATUTARIAS:**
Las reservas que se constituyen por estar establecidas en los estatutos por decisión de la junta directiva están estipuladas como una fracción (**FRE**) de los resultados del período anterior.

$$RTT_{t,e} = RTT_{t-1,e} + FRE \times UTI_{t,e}^+$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FRE Fracción de la utilidad del ejercicio que debe guardarse como reservas estatutarias.

- **ERO_t RESERVAS OCASIONALES:**
Se encuentran constituidas como una fracción (**FRO**) del resultado del ejercicio anterior.

$$ROC_{t,e} = ROC_{t-1,e} + FRO \times UTI_{t,e}^+$$

donde:

Parámetros determinísticos:

FRO Fracción de la utilidad del ejercicio que debe guardarse como reservas ocasionales.

- **EPC_{t,e} PRIMA EN COLOCACIÓN DE ACCIONES:**
La emisión de acciones de la compañía por medio de las cuales se capitaliza es al valor de las acciones que ya había colocado más la cantidad de nuevas acciones emitidas multiplicadas por la diferencia entre el precio de las acciones en esa emisión menos el valor nominal de las acciones.

$$PCA_{t,e} = PCA_{t-1,e} + ACE_{t,e} \times (VAC_{t,e} - VNA)$$

donde:

Variables:

VAC_{t,e} Valor al cual la empresa emite cada acción durante el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **EIS_{t,e} INVERSIONES EN COMPAÑÍAS DE SEGUROS:**
Las inversiones que tenga la compañía en otras compañías de seguros.

$$ICS_{t,e} = ACC_{t,i,e} \times PRM_{t,i,e} \\ \forall i \in ICS$$

donde:

Variables:

ICS_{t,e} Inversiones que la compañía tenga en otras compañías de seguros en el período **t** si ocurre el escenario **e**.

- **EPE_{t,e} PÉRDIDA DE EJERCICIOS ANTERIORES:**
La cuenta en donde se va acumulando las pérdidas del ejercicio

$$PEJ_{t,e} = PEJ_{t-1,e} + UTI_{t,e}$$

- **RRE_{t,e} RESULTADOS DEL EJERCICIO:**
La cuenta en donde se va acumulando el resultado del ejercicio una vez se ha hecho la reserva legal y se han repartido dividendos.

$$RPA_{t,e} = RPA_{t-1,e} + (1 - FCL - FRE) \times UTI^+$$

donde:

Variables:

RPA_{t,e} Resultado del ejercicio del período **t** si ocurre el escenario **e**.

5.3. RESTRICCIONES NO-ANTICIPATIVAS

El árbol de decisiones se describe con base en los siguientes conjuntos:

T Cantidad de etapas del horizonte de planificación

NOD(t) Nodos del árbol de decisiones que pertenecen a la etapa **t**

ESN(r) Escenarios que pasan por el nodo **r**
SIG(N,e) Escenario siguiente al escenario **e** en el conjunto **N**, si el escenario **e** corresponde al último se considera como escenario siguiente al primer escenario

Las restricciones de no-anticipatividad se formulan solo para las variables fundamentales a partir de las cuales se generan todos los movimientos en los estados financieros, estas variables corresponden al valor asegurado y al total de inversiones en activos financieros. La formulación utilizada es:

$$\forall t=1,T \quad \forall n \in NEG \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad VAP_{t,n,e} = VAP_{t,n,h}$$

$$\forall t=1,T \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad \forall i \in IRF \quad NBO_{t,i,e} = NBO_{t,i,h}$$

$$\forall t=1,T \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad \forall i \in IRF \quad NCB_{t,i,e} = NCB_{t,i,h}$$

$$\forall t=1,T \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad \forall i \in IRE \quad ACC_{t,i,e} = ACC_{t,i,h}$$

$$\forall t=1,T \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad \forall i \in IRE \quad NCA_{t,i,e} = NCA_{t,i,h}$$

$$\forall t=1,T \quad \forall r \in NOD(t) \quad \forall e \in ESN(r) \quad h = SIG(NOD(t),e) \quad \forall i \in IRE \quad NVC_{t,i,e} = NVC_{t,i,h}$$

5.4. ECUACIONES PARA MANEJO DE RIESGO

La restricción para manejo del riesgo se aplica acotando el CVaR de las posibles pérdidas y se escribe como:

$$PEE_e = \sum_i UFI_{t,e} - UFI^+_{t,e} \quad \forall e \in ESC$$

$$W_e = PEE_e - VaR \quad \forall e \in ESC$$

$$VaR + 1/(1-\beta) \times \sum_e W_e \times PE_e \leq \phi$$

donde **ESC** representa el conjunto de escenarios **PE_e** la probabilidad de ocurrencia del escenario **e**, **ϕ** el límite sobre el CVaR, **VaR** el valor en riesgo y **β** la probabilidad de que las pérdidas no excedan el **VaR**.

Dado el carácter multi-criterio del problema asociado al manejo del riesgo existen al menos dos posibilidades para la función objetivo:

- Minimizar el valor esperado de las pérdidas restringiendo el CVaR sobre las pérdidas, lo que es igual a

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_e PEE_e \times PE_e \\ & \text{sujeto a} \\ & VaR + 1/(1-\beta) \times \sum_e W_e \times PE_e \leq \phi \end{aligned}$$

- *Minimizar el CVaR restringiendo el valor esperado sobre las pérdidas*

$$\begin{aligned} \text{Min } & \text{VaR} + 1/(1-\beta) \times \sum_e W_e \times PE_e \\ \text{sujeto a} & \\ & \sum_e PEE_e \times PE_e \leq \theta \end{aligned}$$

donde θ representa la cota establecida para las pérdidas.



6. IMPLEMENTACIÓN

6.1. COMPAÑÍA DE SEGUROS F&AC SEGUROS- EMPRESA PROTOTIPO.

Para la aplicación de la metodología propuesta en la presente investigación, es necesario crear una compañía de seguros prototipo. A continuación, se procede a describir las características de dicha compañía que, en adelante, se llamará **F&AC Seguros**.

F&AC Seguros, es una compañía de seguros nacional creada en el año 2000 e inscrita ante la Superintendencia Bancaria como una compañía de seguros generales que solo vende tres ramos de seguros a saber:

- Automóviles (N1)
- Incendio (N2)
- Vida grupo (N3)

Sus estados financieros del último trimestre son los que se presentan a continuación:

BALANCE GENERAL AL 31 DE DICIEMBRE DE 2003 (MILLONES DE PESOS)		
ACTIVO		
DISPONIBLE	1.254.678	104.766.704
CAJA		1.254.678
INVERSIONES	51.360.891	
INVERSIONES NEGOCIABLES EN TÍTULOS DE DEUDA		9.107.873
INVERSIONES NEGOCIABLES EN TÍTULOS PARTICIPATIVOS		42.253.018
CUENTAS POR COBRAR ACTIVIDAD A SEGURO	10.129.013	
REEMBOLSOS SINIESTROS REASEGURADOS POR COBRAR TOTAL		3.517.049
PRIMAS POR RECAUDAR		5.244.986
COMISIONES DE REASEGURADORES POR COBRAR		1.366.978
BIENES REALIZABLES Y RECIBIDOS EN PAGO	8.714.343	
BIENES REALIZABLES		3.788.413
BIENES RECIBIDOS EN PAGO		4.925.931
PROPIEDADES Y EQUIPO	3.537.165	
TERRENOS		122.992
EDIFICIOS		477.406
EQUIPO, MUEBLES Y ENSERES DE OFICINA		1.720.536
EQUIPO DE COMPUTACIÓN		5.535.686
VEHÍCULOS		473.929
DEPRECIACIÓN ACUMULADA		-4.793.384
OTROS ACTIVOS	29.770.614	29.770.614
PASIVO		
CUENTAS POR PAGAR ACTIVIDAD ASEGURADA	13.342.294	53.778.156
PRIMAS CEDIDAS POR PAGAR		5.688.867
SINIESTROS LIQUIDADOS POR PAGAR		7.653.427
CRÉDITOS DE BANCOS Y OTRAS OBLIGACIONES FINANCIERAS	4.659.897	
BANCOS Y ENTIDADES FINANCIERAS		4.659.897
CUENTAS POR PAGAR	4.430.088	
IMPUESTOS		4.430.088
RESERVAS TÉCNICAS DE SEGUROS	22.872.555	
DE RIESGOS EN CURSO		15.219.128
RESERVA PARA SINIESTROS		7.653.427
OTROS PASIVOS	8.473.322	
OBLIGACIONES LABORALES CONSOLIDADAS		4.264.351
PENSIONES DE JUBILACIÓN		4.208.971
PATRIMONIO		
CAPITAL SOCIAL	8.181.149	
CAPITAL SUSCRITO Y PAGADO		8.181.149
RESERVAS	4.214.784	
RESERVA LEGAL		3.750.851
RESERVAS ESTATUTARIAS		463.933
SUPERÁVIT	27.004.494	
PRIMA EN COLOCACIÓN DE ACCIONES		27.004.494
RESULTADOS DEL EJERCICIO	11.588.120	
RESULTADOS DEL EJERCICIO		11.588.120
PERDIDA EJERCICIOS ANTERIORES		0

ESTADO DE RESULTADOS 1 DE OCTUBRE AL 31 DE DICIEMBRE DE 2003 (MILLONES DE PESOS)	
Primas Emitidas	12.944.553
Primas Cedidas	5.688.867
Primas Retenidas	7.255.686
Constitución Reserva Técnica	5.804.549
Liberación Reserva Técnica	6.870.243
Primas Devengadas	8.321.380
Siniestros Pagados	7.653.427
Reemb. Siniestros S/Cesiones	3.517.049
Siniestros Retenidos	4.136.378
Constitución Reserva Siniestros	7.653.427
Liberación Reserva para Siniestros	6.987.263
Siniestros Incurridos	4.802.542
Comisiones a intermediarios	1.461.440
Comisiones de Reaseguro Cedido	1.366.978
Comisiones Netas	-94.462
Gastos de personal	1.016.409
Gastos administrativos	1.458.185
Resultado técnico	949.783
Intereses bancos y otras obligaciones financieras	0,000
Valorización total de las inversiones	1.150.323
Otros ingresos / egresos (RIF)	15.776
UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS	2.115.881
IMPUESTOS DE RENTA Y COMPLEMENTARIOS	814.614
RESULTADOS DEL EJERCICIO	1.301.267

Su fuerza de venta está centrada en agencias de seguros a las que paga una comisión sobre las primas de los negocios que vendan, sin tener en cuenta aquella proporción de primas canceladas, comisión que es pactada con anterioridad de común acuerdo entre las partes y que está en 11.29% independientemente del negocio del cual se trate, la cual les paga inmediatamente sin importar que exista una parte de las primas que sea recaudada en el próximo período. Todas las pólizas tienen una vigencia de 4 períodos (4 trimestres) independientemente del ramo de negocio al que pertenezcan y para el pago de éstas los tomadores de las pólizas deben cancelarlas de contado en el momento en que ésta le es entregada o a los 90 días de esta fecha, es decir al período siguiente de haberla tomado.

Teniendo en cuenta la historia de la compañía las tasas comerciales promedio que tiene estipuladas la compañía por ramo de negocios para el cálculo del valor de las primas, son las que se muestran a continuación:

PRIMAS SEGUROS		
AUTOMÓVILES	INCENDIO	VIDA GRUPO
6%	4.5%	3%

Las proporciones por período en cuanto a las primas recaudadas inmediatamente, las recaudadas en el siguiente período y las canceladas son:

RECAUDO PRIMAS	
AUTOMÓVILES	
RECAUDADAS INMEDIATAMENTE	52.89%
PRÓXIMO PERÍODO	19.92%
CANCELADAS	27.19%
INCENDIO	
RECAUDADAS INMEDIATAMENTE	60.59%
PRÓXIMO PERÍODO	31.29%
CANCELADAS	8.12%
VIDA GRUPO	
RECAUDADAS INMEDIATAMENTE	70.75%
PRÓXIMO PERÍODO	28.75%
CANCELADAS	0.50%

Cumpliendo con la reglamentación que impone la Superintendencia Bancaria, la compañía constituye una reserva técnica de riesgo en curso sobre las primas que retiene (primas emitidas sin tener en cuenta cancelaciones, menos

primas cedidas) por un valor del 80% del valor de las mismas; dicha reserva la comienza a liberar al período siguiente de ser constituida la reserva la reserva y en proporciones iguales en cada uno de los 4 períodos de vigencia de la póliza.

Los siniestros son pagados un período después del que fueron notificados a la aseguradora, es decir, al siguiente período. En cuanto a las reservas de siniestros, la compañía constituye una reserva en el momento en que éste es avisado y por el valor del mismo, reserva que es liberada en su totalidad en el siguiente período.

Por otro lado, F&AC Seguros cuenta con el apoyo de un reasegurador con el que mantiene contratos de la siguiente índole:

- Incendio: contratos de reaseguro proporcional modalidad cuota parte, contratos no proporcional modalidad excedente y contratos de reaseguro facultativo.
- Vida grupo: contratos de reaseguro proporcional modalidad cuota parte, contratos no proporcional modalidad excedente y contratos de reaseguro facultativo.

En el ramo de automóviles F&AC Seguros no tiene ningún tipo de reaseguro debido a que el margen de ganancia es muy pequeño y al reasegurar les surgiría otro costo que disminuiría aún más sus ganancias; por lo tanto al mirar la relación costo beneficio, prefiere asumir todo el riesgo directamente. Las proporciones en cuanto a los porcentajes que reasegura en cada tipo de contrato y por negocio son las siguientes:

PORCENTAJES REASEGURO	
INCENDIO	
REASEGURO PROPORCIONAL	61.42%
REASEGURO NO PROPORCIONAL	5.63%
REASEGURO FACULTATIVO	6.63%
VIDA GRUPO	
REASEGURO PROPORCIONAL	56.04%
REASEGURO NO PROPORCIONAL	6.23%
REASEGURO FACULTATIVO	7.55%

En la misma proporción en que la compañía le cede parte de sus primas al reasegurador dependiendo de la modalidad del contrato de reaseguro, éste debe responderle en el momento que ocurra un siniestro bajo la figura de reembolso. Las primas cedidas son pagadas al siguiente período de ser cedidas y los reembolsos son recaudados al período siguiente de ser causados. F&AC Seguros recibe una comisión por parte de sus reaseguradores por los negocios cedidos, comisión que se estipula en el 20.029% sobre el valor de las primas cedidas independientemente del ramo de negocio del que se trate. Dicha comisión es recaudada el período siguiente en el cual es causada. Hasta el momento, y debido a que es una compañía creada recientemente, F&AC Seguros no ha efectuado y no tiene en sus planes efectuar, contratos de coaseguro.

En cuanto a las reservas F&AC Seguros, además de las reservas legales, estipuló en sus estatutos la constitución de reservas estatutarias por un valor del 50% de los resultados del ejercicio.

Las inversiones tanto de las reservas legales, como las estatutarias, las técnicas de riesgo en curso y las de siniestros, la empresa las posee en títulos participativos (acciones) y títulos de deuda (bonos) así:

TÍTULOS PARTICIPATIVOS (ACCIONES)		
Código	ACCIÓN	Cantidad Inicial de Acciones
A1	BAVARIA	300347.5246
A2	CEMENTOS ARGOS S.A.	267734.4359
A3	COLTABACO	867621.1134
A4	BANCO DE BOGOTA	398439.6755
A5	SURAMERICANA DE INVERSIONES	809939.9314
A6	BANCOLOMBIA	859333.77
A7	COMPANÍA NACIONAL DE CHOCOLATES	837139.2264
A8	COLTEJER	106971334.8
A19	CEMENTOS CARIBE S.A.	329451.6228
A10	TABLEMAC	2923883152

TÍTULOS DE DEUDA (BONOS)				
FECHA EMISIÓN	FECHA MADURACIÓN	VALOR NOMINAL	CUPÓN	NÚMERO DE BONOS
Diciembre 8 de 2000	Diciembre 8 de 2005	105170	15%	50.45
Junio 3 de 2001	Junio 3 de 2005	107299	15%	28.71
Marzo 14 de 2002	Marzo 14 de 2005	109774	15%	40.47

Como la compañía está iniciando, tomó la decisión de no repartir dividendos, esto con el fin de capitalizarse.

Los supuestos utilizados para la implementación del modelo **ALM** son:

- El porcentaje de comisión que la compañía de seguros paga a su agencia, es el mismo para los tres ramos de negocio con los cuales ésta trabaja, esto porque en la realidad dichos porcentajes varían muy poco entre sí.
- Tanto el porcentaje de comisión que la compañía recibe por parte de sus reaseguradores, como el porcentaje que ella paga por comisión a sus intermediarios, se mantiene constante a lo largo del período de planificación porque en la realidad la variación de un período a otro es mínima y de esta manera se facilita el modelaje.
- La tasa que la compañía cobra sobre el valor asegurado para el cálculo del monto de la prima se mantiene constante a lo largo del período de planificación para facilitar el modelaje ya que en la realidad dicha tasa presenta pequeños cambios y además su determinación depende de todo un estudio actuarial que se sale del alcance del objetivo de esta investigación.
- Para facilitar el modelaje y teniendo en cuenta que no hace parte de la finalidad de la investigación, los porcentajes que la compañía reasegura en cada tipo de contrato se mantienen constantes.
- No se tiene en cuenta la participación en las utilidades del reasegurador ya que ésta depende precisamente de dicha utilidad, la cual es completamente exógena al modelo.
- Los salvamentos son variables aleatorias que dependen de otras muchas variables exógenas al modelo, por lo tanto y para facilitar el modelaje, no son tenidos en cuenta.
- La compra y venta, tanto de títulos participativos, como títulos de deuda, se hace de manera uniforme a lo largo de cada período.
- En el cálculo del capital primario y secundario, solo se tomaron en cuenta las cuentas descritas en la formulación del modelo.
- Para facilitar el modelaje se asume que tanto los gastos de administración, como los de personal, son fijos para cada período.
- Se asume que la compañía no tiene inversiones en otras compañías de seguros.
- En el período de planificación F&AC Seguros no vuelve a hacer emisiones de acciones, por lo tanto el rubro de prima en colocación de acciones del patrimonio, permanece constante.
- Los rubros del balance general: “bienes realizables y recibidos en pago” (activo), “propiedad y equipo” (activo), “otros activos” (activo), y “otros pasivos” (pasivo), se mantienen constantes para facilitar el modelaje ya que son cuentas que no hacen parte, como tal, del core de la actividad aseguradora.
- Analizando los datos proporcionados por FASECOLDA en cuanto a los siniestros pagados y los retenidos por las aseguradoras y para facilitar el modelaje ya que el esfuerzo computacional es demasiado grande y complejo, se tomó el factor de retención como fijo. Lo que se hizo para calcular éste valor fue correr el modelo con diferentes factores de retención (comenzado con un valor de los datos suministrados por FASECOLDA), luego determinar el factor de retención calculado por el modelo para cada caso y analizar en qué valor se estabilizaba.

Todas las cifras de dinero que están expresadas en millones de pesos de septiembre de 2004. Los períodos escogidos para el modelaje son trimestres y el horizonte de planificación son 8 períodos (2 años: 2004 y 2005).

6.2. DATOS HISTÓRICOS

6.3. ESCENARIOS SINTÉTICOS

6.4. RESULTADOS

6.4.1. RESULTADOS MODELO DETERMINÍSTICO.

Para verificar el funcionamiento del modelo se corrió un caso determinístico tomando como parámetros de entrada los correspondientes a final del año 2003. Los resultados del modelo determinístico son: por un lado, la utilidad en el horizonte de planificación es de 19837 millones de pesos, y por otro se mantiene la diferencia entre activos y pasivos y patrimonio, con la que se inicia la planificación (cabe recordar que dicha diferencia se debe a las cuentas de activos, pasivos y patrimonio que se mantienen constantes para efectos de facilitar el modelaje, porque no son cuentas que estén directamente relacionadas con el funcionamiento como tal del sector seguros). En las siguientes tablas se muestran los resultados del modelo:

RESULTADOS ACTIVOS - MODELO DETERMINÍSTICO							
Período	A-DIS Disponible	A-RFI Inversiones Renta Fija	A-INV Inversiones Renta Variable	A-RSP Reembolsos por Cobrar	A-PDA Prima Emitidas por Recaudar	A-CDR Comision por Cobrar	TOTAL ACTIVO
1		30753	81455	2039	10735	1129	126111
2		32942	98435	2371	33249	9103	176100
3	4177	32570	106675	3341	27688	7590	182042
4	4489	34384	115237	2707	25661	7301	189777
5		17707	79984	3920	23918	5182	130710
6		8083	72750	2156	5869	1296	90155
7		8067	72599	1446			82112
8	2192		73073	754	4614	1286	81919

RESULTADOS PASIVOS - MODELO DETERMINÍSTICO							
Período	P-PCT Primas Cedidas por Pagar	P-SLP Siniestros liquidados por pagar	P-CPB Cuentas por Pagar Bancos	P-IMR Impuestos por Pagar	P-RRC Reserva Técnica Riesgo Curso	P-RTS Constitución Reserva Técnica	TOTAL PASIVO
1	4948	11376	11245	56279	18034	11376	113259
2	40313	16841		56279	38463	16841	168737
3	33686	19084		56279	48556	19084	176690
4	32208	20639		57618	52921	20639	184025
5	22980	23406	140	906	53969	23406	124807
6	5763	16413		906	36597	16413	76093
7		11229	18698	906	19489	11229	61552
8	5738	7840	22541	2407	11316	7840	57683

RESULTADOS PATRIMONIO - MODELO DETERMINÍSTICO							
Período	T-CSP Capital Suscrito y Pagado	T-REL Reservas Legales	T-RTT Reservas Estatutos	T-RPA Resultados Ejercicio	T-PEJ Pérdidas Ejercicio	TOTAL PATRIMONIO	DIFERENCIA Activo - Pasivo - Patrimonio
1	8181	4091	464	11588	5172	19152	-6300
2	8181	4091	464	11588	10661	13663	-6300
3	8181	4091	464	11588	12272	12052	-6700
4	8181	4091	464	11588	12272	12052	-6300
5	8181	4091	539	11664	12272	12203	-6300
6	8181	4091	4818	15943	12272	20761	-6700
7	8181	4091	7904	19028	12272	26932	-6373
8	8181	4091	9906	21030	12272	30936	-6700

Con base en los anteriores resultados, A continuación, se muestra el balance general de F&AC Seguros para el primer período de planificación:

BALANCE GENERAL AL 31 DE MARZO DE 2004		
(MILLONES DE PESOS)		
ACTIVO		168.132.954
DISPONIBLE		0.000
CAJA		0.000
INVERSIONES	112.207.740	
INVERSIONES NEGOCIABLES EN TÍTULOS DE DEUDA		30752.90
INVERSIONES NEGOCIABLES EN TÍTULOS PARTICIPATIVOS		81454.84
CUENTAS POR COBRAR ACTIVIDAD ASEGUR	13.903.092	
REEMBOLSOS SINIESTROS REASEGURADOS POR COBRAR TOTAL		2039.02
PRIMAS POR RECAUDAR		10734.85
COMISIONES DE REASEGURADORES POR COBRAR		1129.22
BIENES REALIZABLES Y RECIBIDOS EN PAGO	8.714.343	
BIENES REALIZABLES		3.788.413
BIENES RECIBIDOS EN PAGO		4.925.931
PROPIEDADES Y EQUIPO	3.537.165	
TERRENOS		122.992
EDIFICIOS		477.406
EQUIPO, MUEBLES Y ENSERES DE OFICINA		1.720.536
EQUIPO DE COMPUTACIÓN		5.535.686
VEHÍCULOS		473.929
DEPRECIACIÓN ACUMULADA		-4.793.384
OTROS ACTIVOS	29.770.614	29.770.614
PASIVO		
CUENTAS POR PAGAR ACTIVIDAD ASEGURA	16.324.287	
PRIMAS CEDIDAS POR PAGAR		4948.02
SINIESTROS LIQUIDADOS POR PAGAR		11376.27
CRÉDITOS DE BCOS Y OTRAS OBLIGAC.FI	11.245.390	
BANCOS Y ENTIDADES FINANCIERAS		11245.39
CUENTAS POR PAGAR	56.279.320	
IMPUESTOS		56279.32
RESERVAS TÉCNICAS DE SEGUROS Y CAPI	29.409.990	
DE RIESGOS EN CURSO		18033.72
RESERVA PARA SINIESTROS		11376.27
OTROS PASIVOS	8.473.322	
OBLIGACIONES LABORALES CONSOLIDADAS		4.264.351
PENSIONES DE JUBILACIÓN		4.208.971
PATRIMONIO		
CAPITAL SOCIAL	8.181.149	
CAPITAL SUSCRITO Y PAGADO		8.181.149
RESERVAS	4.554.508	
RESERVA LEGAL		4090.58
RESERVAS ESTATUTARIAS		463.93
SUPERÁVIT	27.004.494	
PRIMA EN COLOCACIÓN DE ACCIONES		27.004.494
RESULTADOS DEL EJERCICIO	6.416.179	
RESULTADOS DEL EJERCICIO		11588.12
PERDIDA EJERCICIOS ANTERIORES		5171.941

ESTADO DE RESULTADOS	
1 DE ENERO AL 31 DE MARZO DE 2004	
(MILLONES DE PESOS)	
Primas Emitidas	
Primas Cedidas	
Primas Retenidas	
Constitución Reserva Técnica	
Liberación Reserva Técnica	
Primas Devengadas	
Siniestros Pagados	
Reemb. Siniestros S/Cesiones	
Siniestros Retenidos	
Constitución Reserva Siniestros	
Liberación Reserva para Siniestros	
Siniestros Incurridos	
Comisiones a intermediarios	
Comisiones de Reaseguro Cedido	
Comisiones Netas	
Gastos de personal	
Gastos administrativos	
Resultado técnico	
Intereses bancos y otras obligaciones financieras	

ESTADO DE RESULTADOS 1 DE ENERO AL 31 DE MARZO DE 2004 (MILLONES DE PESOS)	
Valorización total de las inversiones	
Otros ingresos / egresos (RIF)	
UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS	
IMPUESTOS DE RENTA Y COMPLEMENTARIOS	
RESULTADOS DEL EJERCICIO	

6.4.2. RESULTADOS MODELO ESTOCÁSTICO.

El modelo estocástico fue utilizado para analizar la relación riesgo versus utilidad esperada (UE). Para ello se realizaron varias corridas del modelo de forma tal de construir la frontera eficiente CVaR versus UE y VaR versus UE. Para dichas corridas se ignoraron las restricciones relacionadas con la normatividad del sector, para en un paso posterior determinar el efecto de dicha normatividad.

Como escenario aleatorio se construyó un árbol del proceso de toma de decisiones simétrico basado en dos bifurcaciones equiprobables por cada nodo, lo que da un total de 256 escenarios para los 8 períodos de planificación. Para realizar el análisis se realizaron los siguientes casos:

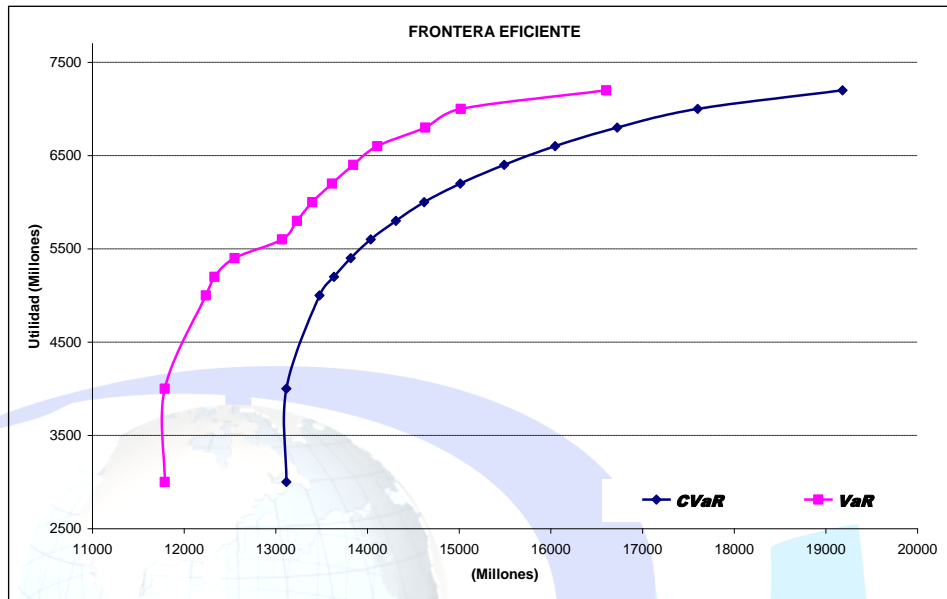
- **Min-CVaR:** se minimiza el CVaR (con probabilidad de 0.95 de no exceder el VaR sin restringir la utilidad esperada)
- **Max-UE:** se maximiza la utilidad sin restringir el CVaR
- **Min-MaxP:** se minimiza la máxima pérdida sin tener en cuenta el CVaR o la utilidad esperada
- **Min-CVaR(ϕ):** se minimiza el CVaR restringiendo la utilidad esperada a ser mayor o igual que ϕ .

Las dos primeras corridas establecen el límite racional para el cual se debe construir la frontera eficiente; el cuarto grupo, **Min-CVaR(ϕ)**, de corridas tiene como objetivo construir dicha frontera.

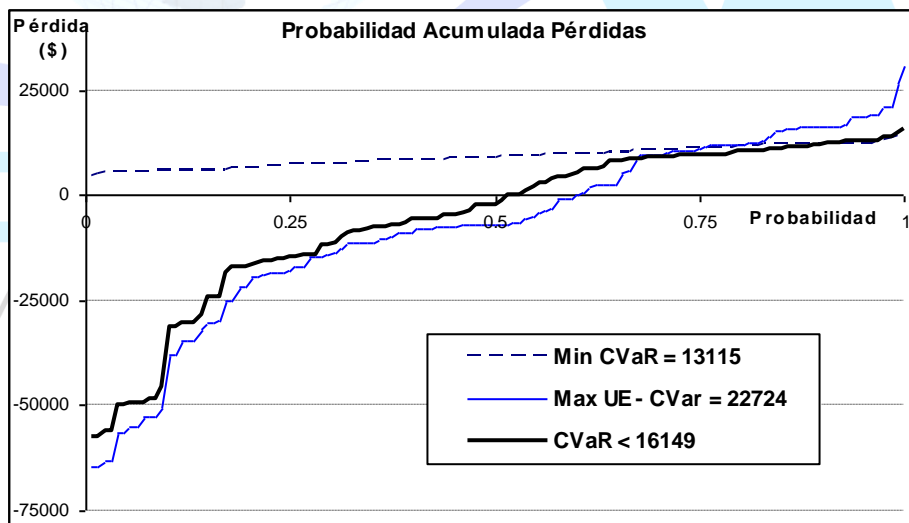
Las corridas realizadas para construir la frontera eficiente se presentan en la siguiente tabla

RESULTADOS AGREGADOS – CORRIDAS ESTOCÁSTICAS (MILLONES DE PESOS)							
Criterio	Utilidad Esperada	VaR	CVaR	Utilidad Mínima	Utilidad Máxima	Rango	Desviación Estándar
Min-CVaR	-8881	11789	13115	-14480	-4561	9919	103579
Max-UE	7328	18651	22724	-30898	64617	95516	261976
Min-MaxP	-9334			-14480	-4578	9903	109694
Min-CVaR (7200)	7200	16604	19181	-24238	64716	88954	256384
Min-CVaR (7000)	7000	15017	17601	-22126	63885	86011	250112
Min-CVaR (6800)	6800	14630	16724	-21272	62419	83691	243630
Min-CVaR (6600)	6600	14108	16047	-20166	61391	81557	238162
Min-CVaR (6400)	6400	13845	15492	-19065	60479	79544	233842
Min-CVaR (6200)	6200	13614	15012	-17700	59711	77411	231203
Min-CVaR (6000)	6000	13398	14620	-16608	58861	75470	228853
Min-CVaR (5800)	5800	13231	14310	-15735	58085	73821	226243
Min-CVaR (5600)	5600	13067	14036	-15764	57358	73122	223951
Min-CVaR (5400)	5400	12551	13818	-15683	56458	72141	221360
Min-CVaR (5200)	5200	12331	13636	-15136	55424	70561	218152
Min-CVaR (5000)	5000	12237	13477	-14481	54429	68909	214785
Min-CVaR (4000)	4000	11789	13115	-14480	51924	66405	201791
Min-CVaR (3000)	3000	11789	13115	-14480	48087	62567	191747
Min-CVaR (2000)	2000	11789	13115	-14480	45254	59734	185707
Min-CVaR (1000)	1000	11789	13115	-14480	45756	60236	173188
Min-CVaR (0)		11789	13115	-14480	45001	59482	168133
Min-CVaR (-1000)	-1000	11789	13115	-14480	44863	59344	160704
Min-CVaR (-2000)	-2000	11789	13115	-14480	44894	59374	165835
Min-CVaR (-3000)	-3000	11789	13115	-14480	44832	59313	142932
Min-CVaR (-4000)	-4000	11789	13115	-14480	42483	56964	145440
Min-CVaR (-5000)	-5000	11789	13115	-14480	17483	31963	123920
Min-CVaR (-6000)	-6000	11789	13115	-14480	17816	32297	116907
Min-CVaR (-7000)	-7000	11789	13115	-14480	17673	32153	121452
Min-CVaR (-8000)	-8000	11789	13115	-14480	15153	29633	119899

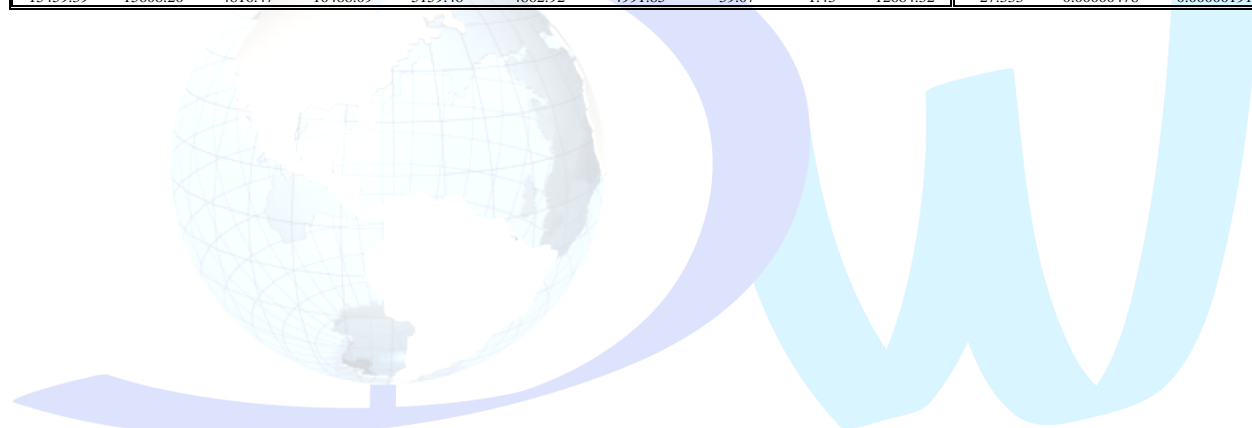
La siguiente gráfica presenta la frontera eficiente para el VaR y para el CVaR.



En la anterior gráfica se puede notar que las características matemáticas del VaR hacen que la frontera asociada sea no-convexa a diferencia del CVaR cuya frontera eficiente asociada es convexa. La siguiente gráfica presenta la función acumulada de probabilidad para las pérdidas asociadas a la solución de maximizar el valor esperado de las ganancias y para la solución asociada el mínimo CVaR.



SERIE DATOS HISTÓRICA COMPAÑÍA DE SEGUROS F&AC SEGUROS												
VALORES DE LAS ACCIONES										TASAS DE RIESGO		
BAVARIA	ARGOS	COLTA BACO	BANCO DE BOGOTA	SURAME RICANA	BAN COLOMBIA	CNCH	COLTEJER	TABLE MAC	CEM. CARIBE	AUTOS	INCENDIO	VIDA GRUPO
68177.53	43434.56	11303.82	41256.18	42317.38	27954.86	15859.39	247.98	71.94	35101.42	3.447	0.00000072	0.00000122
59169.60	34089.06	8117.91	29057.24	29445.87	22119.14	11431.57	214.24	62.52	22914.69	3.427	0.00000144	0.00000229
37285.16	21226.39	4706.19	28565.81	12773.74	8124.15	5211.05	185.10	49.91	15466.83	3.709	0.00000058	0.00000237
42572.13	26498.42	9338.03	28358.94	19250.24	9283.77	9283.32	143.93	34.44	15233.73	4.179	0.00000396	0.00000236
34032.43	19341.16	7255.94	20775.81	12160.88	5637.00	6895.55	132.78	27.01	13249.20	4.917	0.00000055	0.00000089
31243.33	21254.85	6201.29	22151.78	12769.66	5966.23	5901.94	121.90	46.78	14638.18	2.606	0.00000246	0.00000165
26313.70	18452.95	5257.67	18764.54	9362.46	5397.03	6136.17	111.91	34.00	12829.14	3.292	0.00000284	0.00000185
31790.87	18879.13	5206.34	17589.01	8692.09	4109.55	6999.90	65.13	23.30	14807.57	2.795	0.00000298	0.00000219
30743.29	16510.31	4302.35	13849.26	7244.44	3716.93	6363.54	58.97	23.70	14525.33	2.489	0.00000072	0.00000006
22626.28	12844.31	3728.59	9052.05	5195.71	2520.43	4847.30	47.77	13.18	10324.87	3.625	0.00000103	0.00000012
21571.88	12220.24	3439.04	6703.36	4780.58	2277.91	4545.35	41.00	12.45	11341.57	3.293	0.00000112	0.00000015
18479.15	11125.29	3341.65	5070.13	3435.44	2125.10	3874.32	39.76	13.89	10556.63	2.863	0.00000170	0.00000016
17714.40	12179.19	3177.51	5292.01	3588.48	2556.50	3638.64	40.39	11.73	10591.34	3.444	0.00000158	0.00000048
19954.37	14749.90	4034.21	7385.86	3056.22	2750.60	4144.69	41.23	10.92	12518.62	3.778	0.00000260	0.00000135
18279.26	11358.12	3871.38	8680.57	2415.66	2323.10	3355.40	38.38	12.87	10393.66	2.982	0.00000671	0.00000187
16894.53	13387.45	3921.04	9533.64	2584.61	2645.55	3362.20	40.14	8.76	11318.29	4.58	0.00000333	0.00000199
16164.33	13135.40	4556.18	10046.80	2087.26	2474.81	2953.35	34.43	7.08	10307.27	4.861	0.00000022	0.00000028
16440.81	12599.50	5341.11	11999.09	2817.90	2385.08	3384.24	62.62	2.12	10124.17	29.565	0.00000053	0.00000083
15650.64	13087.22	6062.54	10643.93	2551.92	2967.47	3620.97	26.73	2.03	10385.11	13.136	0.00000097	0.00000091
21631.28	14802.90	6700.85	11588.88	3761.26	3908.16	3672.47	34.22	2.26	11054.07	15.143	0.00000095	0.00000120
20230.68	13799.17	6233.15	10977.09	3385.27	3508.24	3510.51	42.51	1.84	10707.48	23.14	0.00000085	0.00000054
19321.30	15053.83	6031.53	11686.17	5146.43	5043.64	3913.35	69.95	2.24	12495.18	31.21	0.00000303	0.00000127
17498.45	14975.51	4893.39	11828.70	4873.25	4918.89	3874.10	50.34	1.75	12747.91	28.846	0.00000397	0.00000177
15459.39	15608.26	4816.47	10488.09	5159.48	4862.92	4991.85	39.07	1.43	12684.32	27.333	0.00000478	0.00000191



DECISIONWARE
 MAKING YOUR WORLD SMARTER

ANEXO A.

EL SECTOR SEGUROS

Según Bustamante y Uribe (1994), el desarrollo de la actividad aseguradora, que constituye una de las principales manifestaciones económicas dentro de un país, evidencia la indudable necesidad que tienen las sociedades, del seguro, el cual es un producto de la cultura. Es por eso por lo que a medida que es mayor el avance cultural y tecnológico de un país, mucho mayor resulta la importancia del seguro, ya que solo en un estadio avanzado de civilización puede estimarse el destacado papel de ese intangible que representa la necesidad de protección. En países desarrollados, como Estados Unidos o Inglaterra, el seguro constituye aspecto vital en las relaciones económicas y se considere el pago de las primas como parte de la canasta familiar.

El incremento de toda actividad económica de un país depende, en mayor o menor grado, del seguro porque sólo éste garantiza contra pérdidas que, de no estar debidamente amparadas, llevarían sin duda alguna a quien las sufre a una comprometida situación financiera cuando no a la bancarrota; gracias al seguro es posible reanudar prontamente la actividad o, cuando menos, reparar el vacío económico que genera un evento que afecte negativamente el patrimonio.

A continuación, se muestra de manera resumida, la estructura del sector asegurador.

A.1. ESTRUCTURA DEL SECTOR

Tomando como referencia la Superintendencia Bancaria, el sector asegurador en Colombia está compuesto por los siguientes tipos de entidades:

- **Compañías de Seguros:**

Las compañías y cooperativas de seguros son entidades que dedican su objeto social a la realización de operaciones de seguro, bajo las modalidades y en los ramos que les son autorizados expresamente. Así mismo, pueden efectuar operaciones de reaseguro, en los términos que establece el Gobierno Nacional.

Los organismos de carácter cooperativo que prestan servicios de seguros deben ser especializados y cumplir la actividad aseguradora principalmente en interés de sus propios asociados y de la comunidad vinculada a ellos.

Son dos los tipos de compañías de seguros que pueden operar en el mercado asegurador colombiano:

- **Compañías de seguros generales:** Son aquellas que por regla general se dedican a la explotación de los denominados seguros de daños, de responsabilidades o de personas (que no generen obligaciones de largo plazo).
- **Compañías de seguros de vida:** Son aquellas que por regla general, explotan los denominados seguros de personas. Estas sociedades tienen la exclusividad para comercializar seguros que generen obligaciones de largo plazo (pólizas de vida individual y/o de pensiones).

- **Sociedades de Reaseguro:**

Las sociedades de reaseguros son aquellas entidades cuyo objeto social consiste exclusivamente en el desarrollo de operaciones de reaseguro. En la actualidad en Colombia no existen sociedades de reaseguro debidamente constituidas en los términos de artículo 53 del Estatuto Orgánico del Sistema Financiero.

- **Corredores de Seguros:**

Son sociedades anónimas cuyo objeto social es exclusivamente el ofrecimiento de seguros, la promoción de la celebración de contratos de seguro y la obtención de su renovación a título de intermediarios entre el asegurado y el asegurador.

- **Agentes y Agencias Colocadoras de Seguros:**

Los agentes colocadores de pólizas de seguros son las personas naturales que promueven la celebración de contratos de seguro y la renovación de los mismos en relación con una o varias compañías. Las agencias colocadoras de seguros representan a una o varias compañías de seguros en un determinado territorio. Los agentes y agencias de seguros no son vigilados por la Superintendencia Bancaria de Colombia (artículo 101 Ley 510 de 1999).

A.2. NEGOCIO

Para entrar a definir cómo es la mecánica del negocio de seguros, se comenzará por enseñar una definición formal de lo que es un seguro.

- **Definición de seguro.**

De acuerdo con Bustamante y Uribe (1994), el seguro es un contrato consensual, bilateral, oneroso, aleatorio y de ejecución sucesiva en virtud del cual el asegurador asume como obligación condicional indemnizar al asegurado hasta una suma máxima a cambio del pago de la prima o precio correspondiente al riesgo asegurable que le traslada el tomador cuando él o sus representados tienen interés asegurable en dicho riesgo.

- **Elementos del contrato de seguros.**

Los elementos esenciales de un contrato de seguro que según el artículo 1045 del Código de Comercio con necesarios para que éste sea válido, son:

- **El interés asegurable:** El Doctor Ehrenberg lo define como “la relación en virtud de la cual alguien sufre un daño patrimonial a consecuencia de un hecho determinado”, es decir, el daño económico que afronta el asegurado al momento de presentarse una pérdida de la persona asegurada o del bien.
- **El riesgo asegurable:** Según el Código de Comercio, “denominase riesgo el suceso incierto que no depende exclusivamente del tomador, del asegurado o del beneficiario y cuya realización da origen a la obligación del asegurador” (artículo 1054 del Código de Comercio).
- **Prima:** Ésta debe quedar estipulada en la póliza y representa la contraprestación que, a favor del asegurador, debe pagar el tomador para la protección de las personas o bienes estipulados también en la póliza.

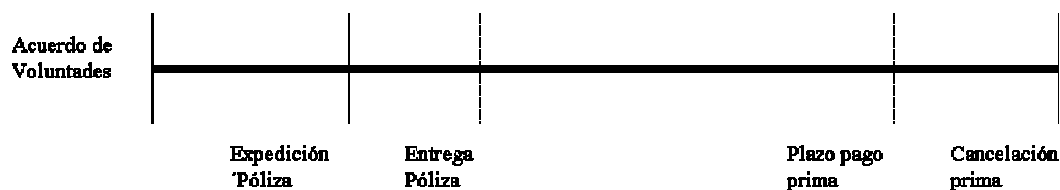
- **Partes del contrato de seguros.**

Según el Código de Comercio (artículo 1037), las partes que integran el contrato de seguro son:

- **El asegurador:** Es la persona jurídica que asume los riesgos, debidamente autorizada por las leyes y reglamentos
- **El tomador:** Es la persona que actuando por cuenta propia o ajena traslada los riesgos a una aseguradora. De la anterior definición se puede deducir que el tomador de la póliza puede ser o no, una persona diferente al beneficiario y al asegurado, una muestra de ello son las pólizas colectivas en las cuales el tomador está representado por una institución que asegura a un grupo de funcionarios.
- **Asegurado:** es el titular del interés asegurable.
- **Beneficiario:** es la persona que se encuentra estipulada en la póliza para que, en caso de ocurrir un siniestro, ésta reciba la indemnización.

- **Dinámica del negocio.**

Básicamente la dinámica es así: el tomador se acerca al asegurador a través de los corredores de seguros, agentes o agencias colocadoras de seguros para expresarle su intención de tomar una póliza con el fin de trasladarle los riesgos que existan sobre el interés asegurable, ya sea una persona o un bien, y acordar el pago de una prima que le dé el derecho de cobrar al asegurador una indemnización en caso de que ocurra un siniestro, a esto se le conoce como acuerdo de voluntades. La compañía de seguros expide la póliza y se la entrega al tomador quien tiene un plazo de 30 días, contados a partir de la fecha en que ésta le ha sido entregada, para pagarla. En caso de no pagarla, la compañía da por terminado el contrato y con ello el tomador del seguro quedará sin cobertura. En el siguiente diagrama se muestran los plazos en la celebración del contrato de seguros.



Plazos contrato de seguros
Fuente: Melo y Méndez (2000).

Para el pago de la póliza el tomador tiene dos opciones: i) De contado: se refiere al pago de la póliza inmediatamente se entrega la misma o el pago a los 30 días; y ii) Financiación: la compañía aseguradora ofrece ciertas líneas de financiación por cuotas para el pago de la póliza.

Una vez ocurre el siniestro el tomador de la póliza debe, dentro de los próximos treinta días de la ocurrencia del siniestro, avisar a la aseguradora. La aseguradora cuenta con un mes para pagar la indemnización, a partir de la presentación de la reclamación por parte del tomador (Artículo 21 de la Ley 35 de 1993).

En caso de que pueda recuperarse parte del siniestro, por ejemplo, vender como chatarra un auto que se dio por pérdida total, a este valor se le conoce como “salvamento” y es un ingreso que entra a la compañía; en caso de que exista un reaseguro, la compañía debe darle al reasegurador una parte proporcional de lo recuperado como salvamento.

A continuación, se describen las obligaciones de las partes en un contrato de seguros

▪ **Obligaciones del tomador.**

De acuerdo con Melo y Méndez (2000), son tres los tipos de obligaciones del tomador:

- **Obligaciones coetáneas:** el tomador está en la obligación de hacer la declaración sincera de los hechos o circunstancias que determinan el estado del riesgo según el cuestionario, verbal o escrito, que le proponga el asegurador.
- **Obligaciones durante la vigencia del contrato:** el tomador debe: mantener el estado de riesgo y pagar la prima inmediatamente o al mes de que ésta se le es entregada.
- **Obligaciones en caso de siniestro:** en caso de ocurrir un siniestro el tomador debe cumplir: demostrar la ocurrencia del siniestro, determinar la cuantía de la pérdida, evitar la extensión y propagación del siniestro y dar noticia al asegurador dentro de los tres días siguientes a la fecha en que haya conocido el siniestro comunicándoles los seguros existentes con indicación del otro o de los otros aseguradores y las respectivas sumas aseguradas.

▪ **Obligaciones del asegurador.**

Además de entregar la póliza al tomador, el asegurador tiene la obligación del pago de la indemnización luego de que analiza la situación del siniestro sobre la base de la póliza vigente y de sus anexos y determina si existe cobertura. Además, también tiene la obligación de presentar la objeción fundamentada y razonada, es decir, informar al cliente por escrito el no pago de la indemnización si hay algo que así lo señale. De igual manera, es obligación del asegurador demostrar todos los hechos que considere que puedan ser modificativos o extintivos de su obligación de pagar.

Existen dos tipos de negocios complementarios al negocio de seguros a los cuales la compañía puede recurrir con el fin de distribuir el riesgo que asume ante el tomador de la póliza.

▪ **Coaseguro.**

Se da el nombre de Coaseguro a la concurrencia de dos o más entidades aseguradoras en la cobertura de un mismo riesgo. También es conocido como la distribución horizontal del riesgo. Desde el punto de vista técnico,

el Coaseguro es uno de los sistemas empleados por los aseguradores para homogeneizar la composición de su cartera; a través de él los aseguradores sólo participan respecto a determinados riesgos en proporciones técnicamente aconsejables. El funcionamiento es así: dos o más aseguradoras, a petición del asegurado o con su aceptación previa, acuerdan distribuirse entre ellas determinado seguro y designan un líder que se encarga de atender el negocio y de expedir la póliza. El líder cobra una comisión y en caso de ocurrir un siniestro cada aseguradora debe responder por el valor del siniestro que le corresponde según la distribución del riesgo entre ellas.

- **Reaseguro.**

“El reaseguro es la transferencia de una parte de los peligros o riesgos que un asegurador directo asume frente a los asegurados, mediante contratos o por disposiciones legales, a un segundo asegurador, el reasegurador, que no tiene relación contractual directa con el asegurado” (M. Grossmann). Entre otras cosas, el asegurador directo se sirve del reaseguro para:

- Estar protegido en caso de catástrofe, y
- Limitar en la mayor medida posible las fluctuaciones anuales de la siniestralidad que ha de soportar por cuenta propia.

Las formas básicas del reaseguro son:

- **Reaseguro facultativo:**

Mediante el reaseguro facultativo se reaseguran riesgos individuales, y el asegurador directo decide libremente si cede en reaseguro un riesgo y, de hacerlo, qué riesgo. También el reasegurador es libre de aceptarlo o de rechazarlo (carácter facultativo). En primer lugar, el asegurador directo tiene que presentar al reasegurador una oferta exactamente definida, en la que figura toda la información sobre el riesgo ofrecido. Seguidamente, tras el examen correspondiente de la oferta, el reasegurador decide si acepta el riesgo o lo rechaza.

Del reaseguro facultativo se hace uso cuando tras el agotamiento de la retención, que corresponde la parte del riesgo que el asegurador directo está dispuesto y es capaz de asumir por cuenta propia, así como de otras posibilidades existentes de reaseguro obligatorio, al asegurador directo le queda una suma de seguro restante, o si una póliza tiene riesgos excluidos del seguro obligatorio, o cuando el asegurador no quiere sobrecargar sus contratos de reaseguro con riesgos particularmente graves.

En los negocios facultativos, cada riesgo aceptado, cada transacción es considerada como un contrato de reaseguro individual. La aceptación, salvo indicación contraria, vale por la duración de la póliza: normalmente por un año como máximo y no se renueva automáticamente. La comisión del reaseguro facultativo es fijada caso por caso por el reasegurador, tomando en cuenta la calidad del negocio, el nivel de la prima y los gastos de la cedente.

Existe dos tipos de reaseguro facultativo: proporcional y no proporcional.

- **Reaseguro obligatorio:**

El reaseguro obligatorio es el seguro contractual de carteras enteras. También se conoce como reaseguro automático. En este tipo de reaseguro, el asegurador directo está obligado a ceder al reasegurador una parte contractualmente estipulada de los riesgos definidos en el contrato de reaseguro y el reasegurador está obligado a aceptar esta parte hasta un límite fijado de común acuerdo, de aquí el término obligatorio. Al igual que en los contratos facultativos, existen dos tipos de reaseguro obligatorio: proporcional y no proporcional.

Los tipos de reaseguro son:

- **Contratos proporcionales.**

En el reaseguro proporcional, primas y siniestros se reparten entre el asegurador directo y el reasegurador en una relación fijada contractualmente (el tipo, la participación del reasegurador y los límites del contrato, se indican en las condiciones particulares estipuladas en el mismo). Según el tipo de contrato, esta relación es idéntica para todos los riesgos bajo un mismo contrato (reaseguro de cuota-parte), o la relación puede variar de un riesgo a otro (otras modalidades de reaseguro proporcional). Existen varias clases de reaseguro proporcional:

- **Cuota-parte.** En el reaseguro cuota-parte, el reasegurador asume un porcentaje fijo (cuota) de todas las pólizas de seguro que un asegurador directo ha suscrito en un ramo o en ramos particulares definidos en el contrato. Esta cuota determinará la distribución, entre el asegurador directo y el reasegurador, de las primas y siniestros. Esta clase de contrato es la más utilizada de los contratos proporcionales puesto que es sencilla de manejar y ahorra costos.
- **Excedente de sumas.** A diferencia del contrato de cuota-parte, en el reaseguro de excedente de sumas el reasegurador no participa en todos los riesgos, sino que el asegurador directo retiene todos los riesgos hasta un determinado importe de responsabilidad en la retención (máximo). Esa retención máxima puede fijarse diferentemente según el tipo de riesgo. Los importes de responsabilidad que superan al máximo los cubre el reasegurador. La obligación de aceptación por parte del reasegurador se limita en importe mediante los denominados excedentes, definidos por un determinado número de máximos. De la repartición entre retención y cesión al reaseguro resulta un coeficiente por riesgo reasegurado, el cual determina la repartición, entre el asegurador directo y el reasegurador, de la responsabilidad, de las primas y de todos los siniestros. La desventaja de este tipo de contrato es que su manejo es complicado, y por consiguiente, su administración es costosa.
- **Contratos no proporcionales.**
En el reaseguro no proporcional no existe ninguna relación fija predeterminada según la cual las primas y siniestros han de ser repartidos entre el asegurador y el reasegurador. La repartición de los siniestros se efectúa según la pérdida efectivamente acaecida. Se define contractualmente hasta qué límite (deducible) asume el asegurador por cuenta propia todos los importes por siniestros. Por su parte, el reasegurador tiene que pagar, hasta el límite de cobertura convenido, todos los siniestros por encima de esta prioridad.

Como precio por esta cobertura, el reasegurador pide una parte adecuada de las primas originales. Para la determinación de este precio, el reasegurador considera la siniestralidad de años anteriores (tarificación empírica) y la siniestralidad esperada de acuerdo con el tipo y la composición de los riesgos cubiertos (tarificación con base en la exposición).

La obligación de indemnización por parte del reasegurador se produce si la cartera reasegurada ha sido afectada y si este siniestro rebasa la prioridad.

Existen varias clases de reaseguro no proporcional:

- **Exceso de pérdida** (“Excess of Loss” – XL). Mientras que en los reaseguros proporcionales son las sumas aseguradas las que determinan la cesión, en el reaseguro de exceso de pérdida son los importes de los siniestros quienes la determinan. En este tipo de reaseguro, el asegurador directo asume por cuenta propia hasta cierto límite (prioridad) todos los siniestros del ramo definido en el contrato, independientemente del importe de la suma asegurada. Los siniestros que superen este monto tiene que pagarlos el reasegurador hasta el límite de cobertura definido. Así, mientras que en los contratos proporcionales el reasegurador participa en todos los siniestros que afecten a las pólizas reaseguradas, en los contratos de exceso de pérdida el reaseguro paga, hasta el límite de cobertura convenido, “solamente” aquellos importes por encima de la prioridad.
- **Exceso de siniestralidad** (“Stop Loss” – SL). En esta modalidad de reaseguro, más bien poco frecuente, el asegurador busca una protección amplia contra fluctuaciones en la siniestralidad anual de un determinado ramo de seguro. Con el Stop Loss, el reasegurador se compromete a asumir una determinada parte de la siniestralidad total anual que supere una prioridad, o un importe fijo absoluto, expresado normalmente en un porcentaje de la prima anual.

A.3. NORMATIVIDAD

A continuación, se muestra un resumen de la normatividad principal que rige la industria aseguradora en Colombia la cual fue extraída textualmente de <http://www.Super-Bancaria.gov.co> y de Bustamante y Uribe (1994).

A.3.1. REGLAS GENERALES SOBRE LA OPERACIÓN DE SEGUROS.

- **Financiación de primas y provisión de cartera.**

Las entidades aseguradoras pueden financiar el pago de las primas de los contratos de seguros que expidan, con sujeción a las siguientes condiciones, siempre que no exceda del setenta por ciento (70%) del valor total de la prima a cargo del tomador y sin sobrepasar los límites individuales de endeudamiento previstos en el Decreto 2360 de 1993.

Los recursos con los cuales se financia el pago de primas deben provenir del patrimonio y demás fondos que no correspondan a las reservas técnicas. Los mecanismos de financiación previstos no pueden ser aplicados a las primas correspondientes a los contratos de seguros cuya forma de pago a través de esta modalidad no fue previamente pactada (numeral 3ro, artículo 183 EOSF y numeral 1.5., Capítulo segundo, Título VI de la Circular Externa 007 de 1996). Las primas de seguros no recaudadas en el lapso previsto para su pago o no financiadas en los términos y condiciones anteriores, deben proveerse según las normas legales vigentes.

- **Cesión de cartera.**

Las entidades aseguradoras pueden transferir sus contratos de seguro, total o parcialmente, a otra que explote el ramo correspondiente. Cuando la cesión se efectúa sobre el veinticinco por ciento (25%) o más de la cartera de un mismo ramo se requiere de la aprobación previa de la Superintendencia Bancaria. Para impartir la autorización la Superintendencia verifica el pago de las reclamaciones presentadas por los asegurados o beneficiarios ante la compañía cedente. De la cesión debe informarse previamente a los asegurados y en ningún caso las condiciones en que se realice la transferencia pueden gravar los derechos de los mismos ni modificar sus garantías (artículo 70 EOSF).

- **Pólizas.**

La aprobación previa de pólizas y tarifas por parte de la Superintendencia Bancaria sólo es necesaria cuando se trata de la autorización inicial a una entidad aseguradora o de la correspondiente para la explotación de un nuevo ramo (ver artículo 184, numeral 1° EOSF).

- **Ramos de seguros.** A partir del 1 de enero de 2003, los ramos bajo los cuales se pueden operar los diversos productos son los siguientes:

CÓDIGOS RAMOS DE SEGUROS	
RAMO	CÓDIGO
Automóviles	03
SOAT	04
Cumplimiento	05
Responsabilidad civil	06
Incendio	07
Terremoto	08
Sustracción	09
Transporte	10
Corriente débil	11
Todo riesgo contratista	12
Manejo	13
Lucro cesante	14
Montaje y rotura de maquinaria	15
Aviación	16
Navegación y casco	17

CÓDIGOS RAMOS DE SEGUROS	
RAMO	CÓDIGO
Minas y petróleos	18
Vidrio	19
Crédito comercial	20
Crédito a la exportación	21
Agrícolas	22
Semovientes	23
Desempleo	24
Hogar	25
Exequias	30
Accidentes personales	31
Colectivo vida	32
Educativo	33
Vida grupo	34
Salud	35
Enfermedades de alto costo	36
Vida individual	37

CÓDIGOS RAMOS DE SEGUROS	
RAMO	CÓDIGO
Previsional de invalidez y sobrevivencia	38
Riesgos profesionales	39
Pensiones Ley 100	40

CÓDIGOS RAMOS DE SEGUROS	
RAMO	CÓDIGO
Pensiones voluntarias	41
Pensiones con conmutación personal	42

- **Reservas técnicas.** Las entidades aseguradoras en Colombia deben constituir las siguientes reservas técnicas (Ver artículo 186 EOSF):
 - **Reserva de riesgos en curso**, que se establece como un valor a deducir del monto de la prima neta retenida con el propósito de proteger la porción del riesgo correspondiente a la prima no devengada.
 - **Reserva matemática**, que se define como la diferencia entre el valor actual del riesgo futuro a cargo del asegurador y el valor actual de las primas netas pagaderas por el tomador;
 - **Reserva para siniestros pendientes**, que tiene como propósito establecer adecuadas cautelas para garantizar el pago de los siniestros ocurridos que no hayan sido cancelados o avisados durante el ejercicio contable.
 - **Reserva de desviación de siniestralidad**, que se establece para cubrir riesgos cuya siniestralidad es poco conocida, altamente fluctuante, cíclica o catastrófica.

A.3.2. REGLAS SOBRE CIERTOS ASPECTOS FINANCIEROS

A.3.2.1. RÉGIMEN PATRIMONIAL

- **Patrimonio técnico.** El patrimonio técnico saneado comprende la suma del capital primario y secundario en los términos señalados a continuación:
 - **Capital Primario**
El capital primario incluye:
 - El capital pagado
 - La reserva legal
 - La prima en colocación de acciones.
 - El saldo que arroje la cuenta patrimonial de ajuste de cambio sin incluir el correspondiente a inversiones de capital ni el derivado de inversiones en bonos convertibles en acciones en filiales o subordinadas del exterior.
 - El valor de las utilidades del ejercicio en curso, en los siguientes casos:
 - Cuando la entidad registre pérdidas acumuladas de ejercicios anteriores, hasta concurrencia de dichas pérdidas.
 - Cuando la entidad no registre pérdidas acumuladas de ejercicios anteriores, en un porcentaje igual al de las utilidades que por disposición de la última asamblea ordinaria hayan sido capitalizadas o destinadas a incrementar la reserva legal, sin que pueda exceder del cincuenta por ciento (50%).
 - El valor de las utilidades no distribuidas correspondientes al ejercicio contable anterior computará durante el trimestre siguiente en los siguientes casos:
 - Cuando la entidad registre pérdidas acumuladas de ejercicios anteriores, hasta concurrencia de dichas pérdidas.
 - Cuando la entidad no registre pérdidas acumuladas de ejercicios anteriores, en una proporción equivalente al porcentaje de las utilidades líquidas del penúltimo ejercicio que hayan sido capitalizadas o destinadas a incrementar la reserva legal, sin que pueda exceder del cincuenta por ciento (50%).
 - El valor total de los dividendos decretados en acciones por la última asamblea ordinaria de accionistas.

Para establecer el valor final del capital primario se deducen los siguientes valores:

- Las pérdidas de ejercicios anteriores y las del ejercicio en curso.
- El valor de las inversiones de capital, efectuadas en compañías de seguros generales, de vida y sociedades de capitalización.

- *El valor de las inversiones en bonos obligatoriamente convertibles en acciones emitidos desde el 1º de junio de 1990 por compañías de seguros generales, de vida y sociedades de capitalización.*
- **Capital Secundario**
El capital secundario incluye:
 - *Las reservas estatutarias.*
 - *Las reservas ocasionales.*
 - *Las valorizaciones de activos fijos utilizados en el giro ordinario de los negocios y el cincuenta por ciento (50%) de las valorizaciones de los demás activos contabilizados de acuerdo con los criterios que establezca la Superintendencia Bancaria de Colombia. En todo caso, no se computarán las valorizaciones correspondientes a bienes recibidos en dación en pago o adquiridos en remate judicial. Tampoco las generadas en inversiones en compañías de seguros generales, o de vida o sociedades de capitalización.*
 - *Las utilidades no distribuidas de ejercicios anteriores, y las del ejercicio en curso, en el monto no computable en el capital primario.*
 - *Los bonos obligatoriamente convertibles en acciones emitidos a partir del 1o. de julio de 1990 cuyo pago en caso de liquidación esté subordinado a la cancelación de los demás pasivos externos de la sociedad y que su tasa de interés al momento de la emisión sea menor o igual que el setenta por ciento (70%) de la tasa DTF calculada por el Banco de la República para la semana inmediatamente anterior.*

Para efectos del cálculo del patrimonio técnico, el valor máximo computable del capital secundario es la cuantía total del capital primario de la respectiva entidad. No obstante, las valorizaciones computadas en la forma prevista en el patrimonio primario no pueden representar más del cincuenta por ciento (50%) del valor total del capital primario.

- **Capital mínimo y patrimonio técnico por ramos.**
De acuerdo con el numeral 1º, artículo 80 del Estatuto Orgánico del Sistema Financiero, las entidades de seguros en Colombia deben acreditar al momento de su constitución, y mantener durante su existencia, un capital mínimo básico además de un patrimonio técnico saneado por tipo de ramo explotado, este último fijado por el Gobierno Nacional. Estos dos conceptos patrimoniales sumados equivalen al capital mínimo de funcionamiento que debe acreditar una compañía de seguros en el país para poder operar en el mercado.

Los montos en pesos colombianos son:

- *Capital mínimo de constitución: \$5.231'000.000.00 (Artículo 80, numerales 1º y 4º del EOSF)*
- *Patrimonio técnico adicional que debe acreditarse para operar los distintos ramos:*

DECISIONWARE
MAKING YOUR WORLD SMARTER

PATRIMONIO TÉCNICO ADICIONAL POR RAMO (Artículo segundo, decreto 206 de 1999)	
RAMO	PATRIMONIO TÉCNICO SANEADO
Automóviles incendio, terremoto, lucro cesante y cualquier otro	3.450.000.000
Automóviles, incendio, terremoto y lucro cesante	2.411.000.000
Automóviles	1.716.000.000
Incendio, terremoto y lucro cesante	695.000.000
Diferentes a automóviles, incendio, terremoto y lucro cesante	1.042.000.000
Vida individual y complementarios	1.592.000.000
Previsionales de invalidez y sobrevivencia	590.000.000
Pensiones con excepción de planes alternativos	1.772.000.000
Riesgos Profesionales	1.182.000.000

Regla adicional: Las compañías y cooperativas de seguros generales que se encuentren autorizadas para explotar o pretendan explotar alguno de los ramos de seguros de personas, deberán acreditar y/o mantener un patrimonio técnico saneado no inferior a setecientos cuarenta y siete millones de pesos (\$747.000.000.00), en adición a los montos señalados para los demás ramos autorizados.

▪ **Margen de solvencia.**

A diferencia de otras actividades económicas, la aseguradora tiene como característica fundamental la de recibir en forma anticipada unos recursos que en conjunto y siendo estos suficientes, le han de permitir el cumplimiento de las contingencias futuras asumidas contractualmente.

Del concepto anterior se destacan dos elementos, el anticipo de unos recursos, los cuales generan para la aseguradora la obligación de mantenerlos adecuadamente invertidos y la suficiencia de los mismos, la cual implica que en caso de defecto, la entidad asuma la diferencia con cargo a sus propios recursos.

Contablemente, el registro de estos recursos toma diversas formas. Los recursos recibidos de terceros constituyen una obligación y por tanto, se deben registrar como un pasivo bajo la denominación de reservas técnicas; el monto de tales reservas tiene una contrapartida en el activo bajo la forma de inversiones, siendo los recursos propios registrados en el patrimonio de la sociedad.

El propósito fundamental de las medidas tendientes a la determinación del capital adecuado, es determinar la cuantía de recursos propios que, como mínimo, las entidades aseguradoras deben mantener disponibles en todo momento para atender las desviaciones que se registren entre los activos y los pasivos de la sociedad; asumiendo que los mismos se encuentran adecuadamente determinados.

▪ **Cuantía mínima del margen de solvencia en las compañías de seguros generales.** *En las compañías de seguros generales el importe mínimo del margen de solvencia debe ser igual al que resulte más elevado del que se obtenga por uno de los siguientes procedimientos:*

- *La cuantía del margen de solvencia en función del monto anual de las primas se determina de la siguiente manera:*
 - *Por concepto de primas se toman tanto las emitidas (directas + coaseguro aceptado), en el ejercicio que se contemple, como las primas aceptadas en reaseguro en el mismo período.*
 - *Hasta siete mil quinientos millones de pesos, de los montos así establecidos, se aplica un porcentaje del dieciocho (18%), y al exceso, si lo hubiere, se aplica el dieciséis por ciento (16%), sumándose ambos resultados.*
 - *La cuantía que se obtenga según lo dispuesto en el numeral anterior se multiplica por la relación existente, en el ejercicio que sirve de base para el cálculo, entre el monto de los siniestros brutos descontados los reembolsos de siniestros, y el importe de estos siniestros brutos, sin que tal relación pueda ser inferior, en ningún caso, al cincuenta por ciento (50%).*
- *La cuantía del margen de solvencia en función de la siniestralidad de los tres (3) últimos ejercicios sociales anuales se establecen de la siguiente manera:*

- *En la cuantificación de los siniestros se deben incluir los liquidados (pagados en el ejercicio que se contemple y en los dos ejercicios inmediatamente anteriores a él, sin deducción por reaseguros), los siniestros pagados por aceptaciones en reaseguros y las reservas para siniestros avisados por liquidar, cuenta compañía y reaseguradores, constituidas al cierre del ejercicio contemplado.*
- *Al saldo que arroje la suma de los factores indicados en el numeral anterior se debe deducir el importe de los recobros y los salvamentos liquidados y realizados por siniestros efectuados en los períodos de que da cuenta el mencionado numeral, así como el monto de la reserva para siniestros avisados por liquidar constituida al cierre del ejercicio anterior al trienio contemplado, tanto para negocios directos como por aceptaciones.*
- *La cifra que resulte de la operación descrita en el numeral anterior se debe dividir por tres (3). Hasta cuatro mil quinientos millones de este resultado se aplica un porcentaje del veintisiete por ciento (27%), y al exceso, si lo hubiese, se aplica el veinticuatro por ciento (24%), sumándose ambos resultados.*
- *La cuantía así obtenida se multiplica por la relación existente en el ejercicio contemplado, entre el importe de los siniestros brutos descontados los reembolsos de siniestros, y el importe bruto de estos siniestros, sin que esta relación pueda ser inferior, en ningún caso, al cincuenta por ciento (50%).*
- **Cuantía mínima del margen de solvencia en las compañías de seguros de vida.** *En las compañías de seguros de vida el monto mínimo del margen de solvencia es igual al resultado que se obtenga de sumar los importes que arrojen las operaciones descritas a continuación:*
 - *Para el ramo de vida individual, la cuantía mínima del margen de solvencia es la suma que resulte de multiplicar el seis por ciento (6%) del total de las reservas matemáticas por la relación que exista, en el ejercicio que se contemple, entre el importe de las reservas matemáticas, deducidas las correspondientes al reaseguro, y el importe bruto de las mismas, sin que esta relación pueda ser, en ningún caso, inferior al ochenta y cinco por ciento (85%).*
 - *Para el ramo de riesgos profesionales se debe atender lo dispuesto en el Decreto 2582 de 1999 o normas que lo modifiquen.*
 - *En los demás ramos explotados por estas compañías el margen de solvencia se determina del mismo modo que para las compañías de seguros generales, pero aplicando, cuando se determina su cuantía en función de las primas, el porcentaje de dieciocho por ciento (18%) hasta dos mil millones de pesos y el dieciséis por ciento (16%) al exceso, si lo hubiese. Para el cálculo en función de la siniestralidad el veintisiete por ciento (27%) se aplica hasta mil doscientos millones de pesos y el veinticuatro por ciento (24%) al exceso.*

A.3.2.2. INVERSIONES

- **Inversiones de las reservas técnicas.** *El cien por cien (100%) de las reservas técnicas de las entidades aseguradoras deben estar respaldadas por títulos emitidos o garantizados por la Nación, títulos emitidos o garantizados por el Banco de la República, títulos emitidos por el Fondo de Garantías de Instituciones Financieras (FOGAFÍN), títulos de renta fija o variable de alta seguridad, liquidez y rentabilidad, por derechos en fondos que inviertan en títulos de renta fija o variable de alta seguridad, liquidez y rentabilidad y por los saldos disponibles en caja y en depósitos a la vista constituidos en entidades financieras (Decreto 094 de 2000).*
- **Inversiones admisibles de las reservas técnicas.** *Las reservas técnicas de las entidades aseguradoras deben estar permanentemente invertidas exclusivamente en los activos que se señalan a continuación. Las inversiones que no cumplen con estos requisitos no son computadas como inversión de las reservas técnicas (Decreto 2779 de 2001):*
 1. *Instrumentos de entidades nacionales:*
 1. *Títulos de deuda pública Interna y Externa.*
 1. *Emitidos o garantizados por la Nación.*
 2. *Emitidos sin garantía de la Nación.*

2. *Títulos emitidos o garantizados por el Banco de la República.*
 3. *Títulos emitidos o garantizados por el Fondo de Garantías de Instituciones Financieras, Fogafín.*
 4. *Títulos emitidos o garantizados por el Fondo de Garantías de Entidades Cooperativas, Fogacoop.*
 5. *Títulos de renta fija emitidos, aceptados, garantizados o avalados por entidades vigiladas por la Superintendencia Bancaria, incluyendo bonos obligatoria u opcionalmente convertibles en acciones.*
 6. *Bonos y títulos hipotecarios emitidos en desarrollo de la Ley 546 de 1999 y otros títulos de contenido crediticio derivados de procesos de titularización de cartera hipotecaria.*
 7. *Títulos de renta fija, incluyendo bonos obligatoria u opcionalmente convertibles en acciones, emitidos por entidades no vigiladas por la Superintendencia Bancaria.*
 8. *Derechos o participaciones en fondos comunes ordinarios y en fondos comunes especiales administrados por sociedades fiduciarias y en fondos de valores y de inversión administrados por entidades vigiladas por la Superintendencia de Valores, que inviertan exclusivamente en títulos inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios de la Superintendencia de Valores y distintos a los contemplados en el numeral 1.9 del presente artículo y de aquellos destinados a realizar inversiones en activos del exterior.*
 9. *Derechos o participaciones en fondos comunes especiales administrados por sociedades fiduciarias y en fondos de valores y de inversión administrados por entidades vigiladas por la Superintendencia de Valores, que inviertan más del 10% del valor del portafolio en emisores que presentan relación de vinculación con la entidad inversionista.*
 10. *Títulos derivados de procesos de titularización cuyos activos subyacentes sean distintos a cartera hipotecaria.*
 11. *Títulos de Renta variable.*
 12. *Derechos o participaciones en fondos comunes especiales administrados por sociedades fiduciarias y en fondos de valores y de inversión administrados por entidades vigiladas por la Superintendencia de Valores, destinados a realizar inversiones en fondos del exterior de renta fija o de acciones que cumplan con la condición establecida en el numeral 2 del presente artículo.*
 13. *Los préstamos con garantía en las pólizas de seguro de vida o títulos de capitalización hasta por su valor de rescate. No serán computables como inversión de las reservas técnicas los préstamos con garantía en las pólizas de seguros de pensiones.*
 14. *Depósitos en cuentas corrientes y cuentas de ahorro. Para este propósito se deducirán los descubiertos en cuenta corriente registrados en el pasivo de acuerdo con las normas del Plan Unico de Cuentas de la Superintendencia Bancaria.*
 15. *Saldos disponibles en caja.*
2. *Instrumentos emitidos o garantizados por entidades del Exterior.*
 1. *Títulos de renta fija emitidos o garantizados por gobiernos extranjeros o bancos centrales extranjeros, de países cuya deuda soberana presente grado de inversión.*
 2. *Títulos de renta fija emitidos o avalados por organismos multilaterales de crédito.*
 3. *Títulos de renta fija emitidos por entidades no bancarias del exterior, cuyos emisores se encuentren localizados en países cuya deuda soberana presente grado de inversión.*
 4. *Títulos de renta fija emitidos, garantizados o aceptados por bancos comerciales o de inversión, cuyos emisores se encuentren localizados en países cuya deuda soberana presente grado de inversión.*
 5. *Derechos o participaciones en fondos de inversión internacionales, que inviertan exclusivamente en títulos de renta fija y cuya deuda soberana del país de origen del administrador del fondo presente grado de inversión.*
 6. *Derechos o participaciones en fondos de inversión internacionales que inviertan en títulos de renta fija y en títulos de renta variable, con garantía del capital y cuya deuda soberana del país de origen del administrador del fondo presente grado de inversión.*
 7. *Derechos o participaciones en fondos de inversión internacionales que inviertan en acciones de entidades con una capitalización de mercado no menor a dos billones de dólares de los Estados*

- Unidos de América (USD2 billones) y cuya deuda soberana del país de origen del administrador del fondo presente grado de inversión.
8. *Derechos o participaciones en fondos de inversión índice, cuya deuda soberana del país de origen del administrador del fondo presente grado de inversión.*
 9. *Derechos o participaciones en fondos internacionales de mercado monetario llamados "Money Market", cuya deuda soberana del país de origen del administrador del fondo presente grado de inversión.*
 10. *Depósitos a la vista o títulos de renta fija emitidos por filiales del exterior de establecimientos de crédito colombianos, localizados en países cuya deuda soberana presente grado de inversión.*
 11. *Depósitos a la vista en entidades bancarias del exterior localizadas en países cuya deuda soberana presente grado de inversión.*
 12. *Como lo establece el literal a) del numeral 1, del artículo 1° del Decreto 094 de 2000, no computan como inversión de la reserva técnica, los títulos derivados de procesos de titularización en donde el originador principal del proceso tenga relación de vinculación con la entidad inversionista*
- **Límites a las inversiones de las reservas técnicas (Decreto 2779 de 2001).**
 - **Límites globales:** *son los límites máximos que se deben cumplir permanentemente, con respecto al valor del portafolio que respalda las reservas técnicas para la inversión en los títulos o instrumentos que se enumeran a continuación:*
 - *Hasta el 30% del valor del portafolio en cada una de las alternativas señaladas en los numerales 1.3, 1.4, 1.6, 1.7 y 2 anteriores.*
 - *Hasta el 5% del valor del portafolio, en cada una de las alternativas señaladas en los numerales 1.9, 1.10 y 1.12 anteriores.*
 - *Hasta el 3% del valor del portafolio en la alternativa señalada en el numeral 1.15 anterior.*
 - *Las inversiones contempladas en los numerales 1.12, 2.7, y 2.8 en conjunto no pueden exceder el 10% del valor del portafolio.*
 - **Límites individuales:** *Con excepción de las inversiones previstas en los numerales 1.1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, se deben tener en cuenta los siguientes límites individuales:*
 - *La inversión en uno o varios instrumentos de una misma entidad, emisor o fondo, no puede exceder del 10% del valor del portafolio.*
 - *Las inversiones o depósitos efectuados en el conjunto de personas naturales o jurídicas que presenten relaciones de vinculación entre sí, no puede exceder del 15% del valor del portafolio.*
 - *Las inversiones o depósitos efectuados en el conjunto de personas naturales o jurídicas que presenten relaciones de vinculación con la entidad aseguradora o sociedad de capitalización, no pueden exceder del 10% del valor del portafolio.*
 - *Los límites individuales se aplican a los originadores de los procesos de titularización correspondientes, en la medida en que conserven una obligación con respecto al título. En caso de existencia de mecanismos externos de seguridad, estos se computan dentro del límite que corresponda a los otorgantes.*
 - *En el caso de títulos avalados, aceptados o garantizados por entidades vigiladas por la Superintendencia Bancaria, el límite se imputa a la entidad mejor calificada entre el emisor y el avalista, en los términos del artículo 5° del Decreto 2779 de 2001. En el caso de las emisiones garantizadas por la Nación, el Banco de la República o FOGAFÍN, el límite se imputa a estas últimas.*
 - **Otras inversiones.** *Son de libre inversión de las entidades aseguradoras, su patrimonio y demás fondos que no correspondan a las reservas técnicas (Decreto 094 de 2001).*

ANEXO B

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

B.1. MODELO DEL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO.

El proceso de Movimiento Browniano Geométrico puede representarse mediante la Ecuación Diferencial Estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t + \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

donde X_t es el valor de la variable en el instante t , μ se conoce como el parámetro de “drift”, σ como el parámetro de difusión, dW_t es un proceso de Ruido Blanco o Proceso de Wiener que se distribuye normalmente con media cero y varianza lineal t y X_0 la condición inicial igual a x .

En términos generales, la estimación del parámetro μ suele ser más complicada que la estimación del parámetro σ . Adicionalmente, si se están considerando varios procesos simultáneamente, es necesario estimar los coeficientes de correlación para cada pareja de procesos estocásticos con el fin de determinar la influencia del comportamiento de un proceso en el comportamiento del otro. En el enfoque que a continuación, se presenta (Läggland 2003) se calcula en primera instancia el parámetro de difusión independientemente del parámetro de “drift”, posteriormente se calcula el parámetro de “drift” y finalmente el coeficiente de correlación para cada pareja de procesos estocásticos. También es posible calcular los coeficientes de correlación antes de calcular el parámetro de “drift” de cada proceso considerado.

B.2. MOMENTOS ESTADÍSTICOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO.

La solución explícita de la ecuación anterior de un Movimiento Browniano Geométrico, asumiendo $W_0=0$, está dada por (Oksendal, 1998):

$$X_t = e^{[\mu + \frac{1}{2} \sigma^2]t + \sigma W_t}$$

Para obtener la solución del proceso de variación cuadrática basta elevar al cuadrado la anterior ecuación. En general, para obtener la solución del proceso de variación n -ésima basta elevar X_t a la n -ésima potencia.

La esperanza condicional de una transición durante un intervalo de duración t dado el estado inicial x^k resulta de aplicar el operador de valor esperado a la ecuación del proceso X_t^k . Es posible verificar sin mayores problemas que dicha esperanza condicional es igual a

$$E(X_t^k | X_0^k = x^k) = m_k(t) = x^k e^{k [(\mu + (k-1) \sigma^2 / 2) t]}$$

También es posible verificar que una fórmula general para las derivadas parciales de $m_k(t)$ con respecto al parámetro de “drift” μ está dada por

$$\partial^p m_k(t) / \partial \mu^p = k^p t^p m_k(t)$$

B.3 ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO DE DIFUSIÓN

Una aproximación práctica para estimar el parámetro de difusión consiste en utilizar el proceso de variación cuadrática. El proceso de variación cuadrática $\{X_t\}^2$ de un proceso estocástico $\{X_t\}$ se define como

$$\{X_t\}^2 = \lim_{\|II\| \rightarrow 0} \sum_{i=1,n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

donde la partición $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo de tiempo $[0, t]$ es tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. La norma $\|II\|$ se define como

$$\|II\| = \max_{i=1,n} (t_i - t_{i-1})$$

La variación cuadrática también puede calcularse a partir del cuadrado del diferencial dX_s del proceso estocástico X con base en las reglas (Björk, 1998)

$$\begin{aligned} dt dt &= 0 \\ dt dW_t &= dW_t dt = 0 \\ dW_t dW_t &= dt \end{aligned}$$

y finalmente integrando sobre el intervalo de tiempo $[0, t]$. De esta manera, el cuadrado del diferencial dX_t es igual a

$$dW_t dW_t = \sigma^2 X_t^2 dt$$

Por consiguiente

$$\{X_t\}^2 = \int_{s=0,t} \sigma^2 X_s^2 ds$$

Aproximando la integral y la variación cuadrática con ecuaciones discretizadas apropiadamente, asumiendo observaciones equidistantes con un intervalo de tiempo Δt entre ellas, de las ecuaciones anteriores se puede estimar el parámetro de difusión σ como

$$\sigma^2 = \sum_{i=1,n} (X_i - X_{i-1})^2 / \Delta t \sum_{i=1,n} (X_{i-1})^2$$

Es importante resaltar el hecho de que la estimación del parámetro de difusión es independiente del valor del parámetro de “drift”.

B.4. ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO DE “DRIFT”

Un enfoque común para estimar el parámetro de “drift” consiste en construir estimadores de máxima verosimilitud de tal manera que la probabilidad de que los datos de la muestra sean generados por el modelo sea maximizada. El estimador de máxima verosimilitud corresponde a aquel valor para el que la derivada de la función de verosimilitud o del logaritmo de dicha función es igual a cero. El problema de dichos estimadores radica en que pueden presentar un pequeño sesgo cuando la muestra de datos no es lo suficientemente grande. Más aún, si la función de verosimilitud no posee una forma cerrada, el cálculo del parámetro se convierte en una tarea tediosa que dista de ser trivial, lo cual implica que sea necesario evaluar otras alternativas de calibración del modelo tales como simulación que pueden traer consigo costos computacionales considerables.

Bibby y Sorensen (1995) presenta un enfoque para corregir el sesgo del estimador de máxima verosimilitud por medio del concepto de una función martingale discreta. La idea central es añadir un término compensatorio a una función de verosimilitud que es de hecho un proceso estocástico discreto, pero no un martingale, de tal manera que la función resultante sea una función martingale discreta. Dado que la función de verosimilitud para el caso del Movimiento Browniano Geométrico posee una forma cerrada, se considera apropiado utilizar el enfoque de la función de martingale discreta para estimar el parámetro de “drift”. En primera instancia, se asume que las observaciones del proceso estocástico de interés son equidistantes entre sí. Sin embargo, el concepto de la función martingale discreta puede ser extendido fácilmente para el caso de muestras en las que las observaciones no son equidistantes entre sí.

En el caso particular del Movimiento Browniano Geométrico, la función de verosimilitud está dada por

$$L_t(\mu, \sigma) = \mu / \sigma^2 \int_{s=0, t} (1/X_s) dX_s - (\mu^2 / 2 \sigma^2) t$$

Utilizando una suma de Itô y una suma de Riemann para calcular las integrales mediante una aproximación discreta de observaciones equidistantes y diferenciando la función de verosimilitud con respecto a μ se obtiene la función de estimación discreta

$$\lambda_n(\mu) = \sum_{i=1, n} (1 / \sigma X_{(i-1)\Delta})^2 (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) - n \Delta t \mu / 2 \sigma^2$$

$\lambda_n(\mu)$ es un proceso estocástico discreto donde el tiempo está indexado sobre la cantidad de datos de la muestra, n . Es posible verificar que esta función es sesgada ya que su valor esperado es diferente de cero para cualquier valor de $n > 0$.

Sea F la esperanza de una transición del proceso $\{X_t\}$ durante un intervalo de tiempo Δt condicionada en que el estado inicial es x .

$$F(x, \mu) = E(X_{i\Delta} | X_{(i-1)\Delta} = x)$$

El término compensatorio que debe ser restado a la función de estimación discreta está dado por

$$\sum_{i=1, n} E(\lambda_i(\mu) - \lambda_{i-1}(\mu) | X_{(i-1)\Delta}, X_{(i-2)\Delta}, \dots, X_0) = \sum_{i=1, n} [1 / \sigma^2 X_{(i-1)\Delta} (F(X_{(i-1)\Delta}, \mu) - X_{(i-1)\Delta}) - n \Delta t \mu / \sigma^2]$$

Por lo tanto, la Función Martingale de Estimación resultante es

$$G_n(\mu) = \sum_{i=1, n} [X_{i\Delta} - (F(X_{(i-1)\Delta}, \mu))] / \sigma^2 X_{(i-1)\Delta} = \sum_{i=1, n} (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) e^{u \Delta t} / \sigma^2 X_{(i-1)\Delta}$$

Si se considera el hecho de que la Función Martingale de estimación posee valor esperado igual a cero para cualquier valor de $n > 0$, una alternativa razonable para estimar el parámetro de “drift” consiste en hallar el valor de μ para el cual $G_n(\mu)$ es igual a cero.

Göing (1995) presenta Funciones martingale de estimación de orden superior. Para el caso del Movimiento Browniano Geométrico una de dichas funciones está dada por

$$K_n(\mu) = \sum_{i=1, n} \{ [\phi'(\Xi) \eta(\Xi) - F'(\Xi) \varphi(\Xi)] [X_{i\Delta} - F(\Xi)] + [F'(\Xi) \eta(\Xi) - \phi'(\Xi) \phi(\Xi)] [(X_{i\Delta} - F(\Xi))^2 - \phi(\Xi)] \} / [\phi(\Xi) \varphi(\Xi) - \eta(\Xi)^2]$$

donde Ξ representa la pareja argumento $(X_{(i-1)\Delta}, \mu)$

$$\phi(x, \mu) =$$

$$\varphi(x, \mu) = E [(X_{i\Delta} - F(x, \mu))^4 | X_{(i-1)\Delta} = x] - \phi(x, \mu)^2$$

$$\eta(x, \mu) = E [(X_{i\Delta} - F(x, \mu))^3 | X_{(i-1)\Delta} = x]$$

Lägland (2003) presenta un ejemplo de calibración del parámetro de drift para diferentes tipos de procesos de difusión, donde la función martingale de estimación de orden superior presenta un mejor desempeño en términos de la precisión en la estimación con respecto a las funciones de orden inferior. Por tal razón, en este trabajo de investigación se utilizará la función de orden superior presentada por Göing (1995).

B.5. CÁLCULO DE CO-MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

Las variables aleatorias financieras tales como precios de mercado de las acciones de una compañía, tasas de descuento de bonos emitidos por el gobierno y tasas de interés de préstamos emitidos por entidades bancarias suelen estar correlacionadas. Esto quiere decir que dichas variables tenderán a moverse conjuntamente bien sea en el mismo sentido, o en sentido contrario. En el presente trabajo de investigación se considerarán procesos estocásticos de Wiener correlacionados. La medida de correlación entre dichos procesos puede estimarse de la siguiente manera.

Considere dos procesos estocásticos X y Y cuya dinámica puede caracterizarse a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu X_t + \sigma X_t dW_t \\dY_t &= \beta Y_t + \gamma Y_t dV_t\end{aligned}$$

donde β y γ son los parámetros que definen el proceso estocástico para Y . Los procesos de Wiener W y V tienen correlación instantánea ρ definida como

$$dW_t dV_t = \rho ds$$

La correlación instantánea entre dos procesos no necesariamente es un valor constante; sin embargo, se asumirá constante como una primera aproximación al problema.

Sea $\{X, Y\}_t$ el proceso de variación cruzada entre X y Y definido como (Karatzas & Shreve 1998):

$$\{X, Y\}_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1, n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

donde la partición $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo de tiempo $[0, t]$ es tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Una forma práctica de calcular la variación cruzada consiste en multiplicar los diferenciales de X y Y y partir de las reglas

$$\begin{aligned}dt dt &= 0 \\dt dW_t &= dW_t dt = 0 \\dt dV_t &= dV_t dt = 0 \\dW_t dV_t &= \rho dt\end{aligned}$$

Es posible estimar mediante integración dicho valor como

$$\{X, Y\}_t = \rho \int_{s=0, t} \mu \beta X_s Y_s ds$$

Discretizando adecuadamente esta ecuación e igualándola a la definición de variación cruzada, es posible calcular un estimador de la correlación instantánea como

$$\rho = \sum_{i=1, n} (X_i - X_{i-1}) (Y_i - Y_{i-1}) / \sigma \gamma \sum_{i=1, n} X_{i-1} Y_{i-1}$$

B.6. MOMENTOS PLANOS Y CO-MOMENTOS

Con el fin de representar adecuadamente la evolución del proceso estocástico que modela el comportamiento de las variables financieras de interés en el árbol de decisiones bajo escenarios aleatorios, requerido para desarrollar el modelo de programación estocástica, es necesario considerar los momentos estadísticos de las transiciones que realiza dicho proceso. En particular, es de interés estimar momentos planos, (i.e. momentos estadísticos construidos

sobre una variable aleatoria unidimensional) y co-momentos, (i.e. momentos estadísticos construidos sobre dos o más variables aleatorias) con el fin de caracterizar el comportamiento del valor esperado y de la volatilidad del proceso estocástico en función en el tiempo.

La ecuación explícita para la evolución de un Movimiento Browniano Geométrico está dada por

$$X_t = X_0 e^{[\mu + \frac{1}{2} \sigma^2] t}$$

de esta manera, para hallar momentos estadísticos del proceso X basta aplicar el operador valor esperado a las potencias de X_t . Es posible verificar que el k –ésimo momento plano de X_t está dado por

$$E(X_t^k | X_0^k = x^k) = m_k(t) = X_0^k e^{k [\mu + (k-1) \sigma^2/2] t}$$

En el caso del proceso cruzado $\{X, Y\}_t$, es posible calcular el co-momento de segundo orden $E(X_t Y_t)$ calculando primero de manera explícita $X_t Y_t$. Para ello, sea $Z_s = X_s Y_s$. Por la fórmula de Itô,

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Al integrar se obtiene

$$Z_t = Z_0 + (\mu + \beta + \rho\sigma) \int_{s=0,t} Z_s ds + \sigma \int_{s=0,t} Z_s dW_s + \gamma \int_{s=0,t} Z_s dV_s$$

Si se denota $E(Z_t)$ como $m_{11}(t)$, entonces, aplicando el operador de valor esperado y diferenciando con respecto a t se obtiene

$$dm_{11}(t)/ dt = (\mu + \beta + \rho\sigma)m_{11}(t)$$

Por lo tanto, al resolver la ecuación diferencial ordinaria se obtiene que el co-momento de segundo orden $m_{11}(t)$ para el proceso cruzado de dos Movimientos Brownianos Geométricos X y Y está dado por

$$m_{11}(t) = X_0 Y_0 e^{(\mu + \beta + \rho\sigma)t}$$

Para obtener co-momentos de mayor orden basta realizar el procedimiento anterior por parejas de variables y posteriormente construir nuevas parejas a partir de las variables compuestas hasta incluir la última variable.



BIBLIOGRAFÍA

- Ackerman, S. (2001). "The Enterprise in Enterprise Risk Management". *Casualty Actuarial Society Enterprise Risk Management Seminar*. 2001.
- Arbeláez, M. A. y Zuluaga, S. (2001). "Las Aseguradoras y el Régimen de Inversión". Fedesarrollo, Alfaomega S.A 2001.
- ARI Risk Management Cosultants (2001). "Enterprise Risk Management: The Intersection of Risk and Strategy". www.riskadviser.net/Cases/case.htm
- Banco de Pagos Internacionales, Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (2001). "El Nuevo Acuerdo de Capital de Basilea"
- Bibby, B. M. and Sorensen, M. (1995). "Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes". Bernoulli, 1995.
- Björk T. (1998). "Arbitrage Theory in Continuous Time". Oxford University Press, 1998.
- Bustamante, J. y Uribe Osorio, A. I. (1994). "Principios Jurídicos del Seguro". Colombo Editores. Segunda Edición. Bogotá. 1994
- Cariño et al. (1994). "The Russel-Yasuda Kasai Model, An Asset-Liability Model for a Japanese Insurance Company". *Interfaces* 24:1
- Casualty Actuarial Society (2003). "Enterprise Risk Management Committee. Overview Risk Management". Committee, Mayo 2003.
- Comisión Europea (2001), DG Mercado Interior Nota a la Atención del Subcomité de Solvencia. Bruselas, Junio de 2001.
- COSO. "Enterprise Risk Management Framework". Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission - COSO.
- Eppen and Famma (1971). "Three Asset Cash Balance and Dynamic Portfolio Problems". *Management Science*, 17(5), 311-319, 1971.
- Göing, A. (1995). "Estimation in Financial Models". Department of Mathematics, ETH, Zurich, January 1996.
<http://www.Super-Bancaria.gov.co>
- J. Miccolis, S. Shah (2001). "Enterprise Risk Management, An Analytic Approach". Tillinghast - Towers Perrins, Monograph.
- J. Serrano (2002). "Matemáticas Financieras y Evaluación de Proyectos". Ediciones Uniandes, Alfaomega, 2002.
- Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1998). "Brownian Motion and Stochastic Calculus". Springer Verlag, 2nd 1998.
- Kusy, I. and Ziemba (1986). "A Bank Asset and Liability Management Model". *Operations Research*, 35, 356-376, 1986.
- Läggland, T. (2003). "Stochastic Optimization in Dynamic Asset and Liability Management". Department of Technical Physics and Mathematics, Helsinki University of Technology, January 2003.
- Lara Haro. (2004) "Medición y Control de Riesgos Financieros". Limusa – Noriega Editores, Tercera edición, 2004.
- Lee, R. B. n. L. Nelson and A. e. Kleffner. A Framework for the Third Generation of Risk Management. Working Paper 2003-02, Submitted to Journal of Business, Haskayne School of Business, University of Calgary.
- Markowitz, H. M. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, 7 (1), 77 – 91, 1952.

- Markowitz, H. M. (1987). "Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets". Basil Blackwell, New York.
- Martens F. and Nottingham L. "Enterprise Risk Management: A Framework for Success".
- Melo, F. y Méndez A. "Módulo de Capacitación Aspectos Generales del Contrato de Seguros". Segunda edición. 2000, Impresión: Javegraf, Seguros Bolívar.
- Mulvey, J. M. (1996). "An Asset-Liability Investment System". *Interfaces* 24:3..
- Oksendal B. (1998). "Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications". Springer, 1998.
- Sistema General de Riesgos (2003) Normas de Gobierno Corporativo (Proyecto de circular externa de la Superintendencia Bancaria). Bogotá, D.C., Noviembre de 2003.
- Stulz, R. "Optimal Hedging Policies": *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1984.
- Superintendencia Bancaria de Colombia (1996). "Capitalización, Seguros e Intermediarios" de la Circular Externa 007 de 1996
- Superintendencia Bancaria de Colombia (1996). Circular Externa 052 de 2002.
- Superintendencia Bancaria de Colombia. (2002) "Plan Único de cuentas para le Sector Asegurador". Circular Externa 042 de 2002.
- Svetlozar, R. and Yesim T. "Asset and Liability Management: Recent Advances". Institute of AçStatistics and Mathematical Economics, School of Economics, University of Karlsruhe, Germany.
- Tillinghast - Towers Perrins (2002). "Tillinghast Survey Shows Insurers Use Enterprise Risk Management to Address Their Most Pressing Business Issues". New York, Diciembre de 2002. www.towersperrin.com
- Velásquez, J. M. (2002). "Planificación Estratégica de Riesgos Financieros. Libro "Ingeniería Industrial Inandina 20 Años: Pasado, Presente y Futuro" editado por Jaime Enrique Varela. Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Los Andes, 2002
- Velásquez, J. M. "Programación Estocástica Multietapa con Manejo de Riesgo". Tesis Doctoral: Universidad Nacional de Colombia, Enero 2005.
- Zenios, A. (1993) "Financial Optimization". Cambridge University Press, Cambridge, UK. 1993.
- Zenios, S. and Rosen, D. (2002). "Enterprise – Wide Asset Liability Management: Issues, Institutions and Models". HERMES Center of Excellence on Computational Finance & Economics, University of Cyprus.
- Zipkin P. (1992). "The Structure of Structured Bond Portfolio Models". *Operation Research*, Jan/Feb, 157-169

MAKING YOUR WORLD SMARTER